Υποστηρικτικό υλικό για την εργασία «*Πειραματική διάταξη για τη μελέτη της ροής ρευστού σε σωλήνα*» του Σπύρου Χόρτη.

Η εργασία δημοσιεύτηκε στο 9ο τεύχος του περιοδικού *Φυσικές Επιστήμες στην Εκπαίδευση*, σσ. 31-46.

Ορισμοί

Ρευματική ή ροϊκή γραμμή, ονομάζουμε την τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού κατά την κίνησή του. Είναι η γραμμή, σε κάθε σημείο της οποίας η ταχύτητα του ρευστού είναι εφαπτόμενη σ’ αυτήν.

Μόνιμη ροή ονομάζουμε τη ροή κατά την οποία σε κάθε σημείο του πεδίου ροής η ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου. Στην περίπτωση μόνιμης ροής οι ρευματικές γραμμές είναι αμετάβλητες στο χώρο.

Στρωτή (ή στρωματική) ροή είναι η ροή κατά την οποία η κίνηση του ρευστού γίνεται σε στρώματα και οι γραμμές ροής είναι ομαλές καμπύλες, χωρίς να έχουμε ανάμιξη μακροσκοπικής κλίμακας μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων.

Τυρβώδης ροή είναι η ροή κατά την οποία τα σωματίδια ρευστού εκτελούν χαοτική κίνηση. Η ταχύτητά τους μεταβάλλεται ακανόνιστα και οι γειτονικές στρώσεις που αναφέραμε στη στρωτή ροή αναμιγνύονται έντονα σε μακροσκοπική κλίμακα.

Ιδανικό ρευστό ονομάζεται ένα ρευστό που είναι απαλλαγμένο, εσωτερικής τριβής (ιξώδους) και θερμικής αγωγιμότητας.Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν ιδανικά ρευστά, είναι όμως ένα πολύ χρήσιμο μοντέλο από το οποίο προκύπτουν οι νόμοι που περιγράφουν τη ροή κάποιων πραγματικών ρευστών με ικανοποιητική προσέγγιση.

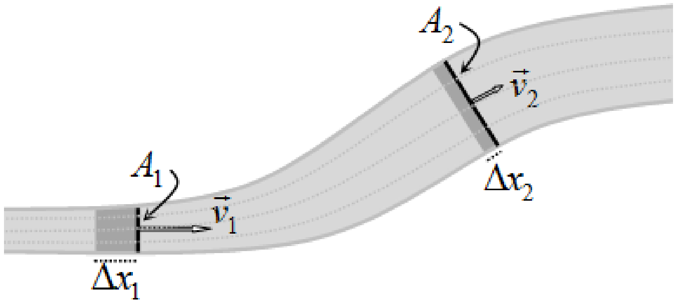
Στη συνέχεια θα εξάγουμε με απλό τρόπο δύο βασικές εξισώσεις για τα ιδανικά ρευστά.

Εξίσωση συνέχειας

Έστω μια φλέβα ρευστού όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Σε χρονικό διάστημα Δt, διέρχεται από την διατομή εμβαδού A_1 μάζα νερού $\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$, και αντίστοιχα από τη διατομή εμβαδού A_2, διέρχεται μάζα $\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$.

Επειδή η ροή είναι στρωτή και δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες, η μάζα μεταξύ των διατομών A_1 και A_2 της φλέβας διατηρείται σταθερή. Δηλαδή, $\Delta m_1 = \Delta m_2$ ή $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ και αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο, οπότε $\rho_1 = \rho_2$,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



Σχήμα 1.

Επομένως για κάθε σημείο μιας φλέβας ασυμπίεστου ρευστού ισχύει,

$$Av = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{1}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η ***εξίσωση συνέχειας*** για ασυμπίεστα ρευστά κατά μήκος μιας φλέβας. Επειδή η εξίσωση συνέχειας εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας του ρευστού ισχύει για κάθε είδους ρευστό και για οποιοδήποτε πεδίο ροής και εκφράζεται γενικά μέσω της σχέσης,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{v} \right) = 0$$

Εξίσωση Bernoulli

Έστω ότι σε χρονικό διάστημα Δt ποσότητα ρευστού μάζας Δm διέρχεται από την διατομή εμβαδού A_1 (σημείο Σ_1 , σχήμα 2) . Στο ίδιο χρονικό διάστημα ίση ποσότητα μάζας διέρχεται από την διατομή A_2 (σημείο Σ_2). Για την μεταβολή της κινητικής ενέργειας της μάζας Δm σύμφωνα με το θεώρημα έργου ενέργειας θα έχουμε,

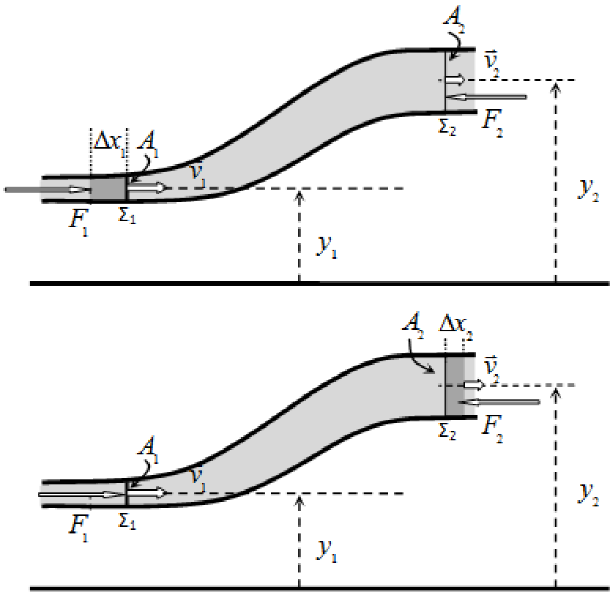
$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 - \Delta m g \left(y_2 - y_1 \right)$$

ή λαμβάνοντας υπόψη ότι, $F_i = p_i A_i,\ A_i \Delta x_i = \Delta V_i = \dfrac{\Delta m}{\rho} \qquad i = 1,2$

$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1$ και αφού τα σημεία Σ_1 και Σ_2 είναι τυχαία,

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (2)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η ***εξίσωση Bernoulli***. Η σταθερά εξαρτάται από τη ρευματική γραμμή.



Σχήμα 2.

Γενική περιγραφή της ροής ασυμπίεστου ρευστού. Εξισώσεις Navier – Stokes

Οι εξισώσεις κίνησης ενός στοιχειώδους σωματιδίου ασυμπίεστου ρευστού δίνονται γενικά από τις εξισώσεις Navier – Stokes, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα σε στοιχειώδες τμήμα του ρευστού. Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γράφονται ως εξής[1],[2].

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

όπου, v_x, v_y, v_z οι συνιστώσες της ταχύτητας στους τρεις άξονες και η ο συντελεστής ιξώδους. Οι όροι στο αριστερό μέλος των εξισώσεων είναι όροι επιτάχυνσης (επί μάζα ανά μονάδα όγκου) και στο δεξιό όροι δύναμης (ανά μονάδα όγκου), λόγω βαθμίδας της πίεσης, βαρύτητας ή άλλου εξωτερικού πεδίου και λόγω εσωτερικής τριβής (ιξώδους). Οι παραπάνω μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους $\left(v_x, v_y, v_z, p\right)$. Η γενική επίλυση όμως του συστήματος αυτού είναι εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση και είναι ένα ανοιχτό πρόβλημα η ύπαρξη ή όχι ομαλών λύσεων στις τρεις διαστάσεις. Σε ειδικές περιπτώσεις όπου το πεδίο ροής παρουσιάζει κάποιου είδους συμμετρία, οι εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικά και μπορούν να επιλυθούν σχετικά εύκολα.

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν σε συμπαγή διανυσματική μορφή ως,

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}+\eta\left(\nabla^2\vec{v}\right) \qquad (3)$$

Ροή ρευστού χωρίς ιξώδες. Εξίσωση του Euler

Στην περίπτωση ρευστού χωρίς ιξώδες $\left(\eta=0\right)$ η εξίσωση (3) γίνεται.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\vec{g} \qquad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι η **εξίσωση του Euler** για μη ιξώδη ρευστά. Προκύπτει ως ειδική περίπτωση των εξισώσεων Navier – Stokes, ωστόσο προηγήθηκε αυτών κατά περίπου 100 χρόνια. Στην περίπτωση **μόνιμης ροής** η ταχύτητα σε κάθε σημείο του πεδίου ροής είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου, οπότε $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=0$ και η εξίσωση (4) γίνεται,

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p+\vec{g}$$

Από την ταυτότητα, $\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$ με $\vec{A}=\vec{B}=\vec{v}$ βρίσκουμε, $\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)-\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση και θεωρώντας ότι ο άξονας $z'z$ έχει την κατακόρυφη διεύθυνση με θετική φορά προς τα πάνω, οπότε $\vec{g}=-g\hat{z}$, έχουμε,

$$\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(v^2\right)+g\hat{z}=\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)$$

Έστω $d\vec{s}=\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz$ η στοιχειώδης μετατόπιση κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής. Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την τελευταία εξίσωση με $d\vec{s}$ παίρνουμε,

$$\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}\cdot d\vec{s}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(v^2\right)\cdot d\vec{s}+g\hat{z}\cdot d\vec{s}=\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{s} \qquad (5)$$

Το διάνυσμα $\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{v}\right)$ είναι κάθετο στην ταχύτητα, η διεύθυνση της οποίας είναι εξ ορισμού εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της ρευματικής γραμμής. Άρα το δεύτερο μέλος της (4) μηδενίζεται αφού είναι το εσωτερικό γινόμενο κάθετων διανυσμάτων. Επίσης λαμβάνοντας υπόψη ότι, $\vec{\nabla}p\cdot d\vec{s}=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp$, $\vec{\nabla}\left(v^2\right)\cdot d\vec{s}=d\left(v^2\right)$ και $\hat{z}\cdot d\vec{s}=dz$, η (4) γίνεται,

$$\frac{dp}{\rho}+\frac{1}{2}d\left(v^2\right)+gdz=0$$

η οποία με ολοκλήρωση δίνει $\left(\rho=\sigma\tau\alpha\theta.\right)$,

$$p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho gz=\sigma\tau\alpha\theta.$$

που είναι η **εξίσωση Bernoulli** και ισχύει κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής. Η σταθερά εξαρτάται από την δεδομένη ρευματική γραμμή.

Είναι προφανές από τα προηγούμενα ότι αν $\vec{\nabla}\times\vec{v}=0$, καταλήγουμε και πάλι στην εξίσωση Bernoulli ανεξάρτητα από την κατεύθυνση του $d\vec{s}$. Δηλαδή **σε αστρόβιλο πεδίο ροής, η εξίσωση Bernoulli ισχύει με την ίδια τιμή της σταθεράς για κάθε σημείο του.**

Αναφορές

1. Hibbeler, R. C. (2015). *Fluid Mechanics*. Pearson Prentice Hall. NJ.

2. Young, D. F., Munson, B. R., Okiishi, T. H. and Huebsch, W. W. (2007). *A Brief Introduction to Fluid Mechanics, 6thEd.* Wiley.