Μια παράξενη πτώση

Ένα πολύ γνωστό φαινόμενο είναι αυτό της ελεύθερης πτώσης ενός ελατηρίου όπως αυτού της εικόνας *(με click στην εικόνα μπορείτε να δείτε το βίντεο)*, το οποίο είναι αρχικά σε ισορροπία αναρτημένο από το πάνω άκρο του. Είναι εντυπωσιακό όταν φαίνεται σε αργή κίνηση ανεξάρτητα αν κάποιος μπορεί ή όχι να ερμηνεύσει το φαινόμενο.

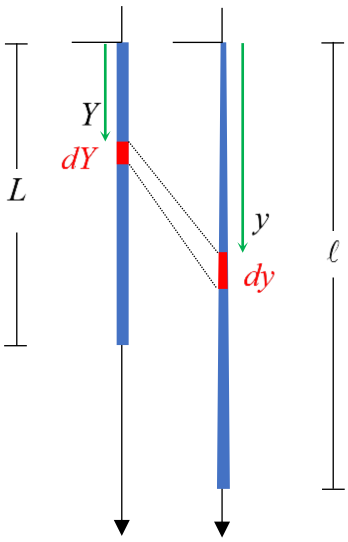
Μια σύντομη ποιοτική ερμηνεία του φαινομένου είναι η εξής. Στην κατάσταση ισορροπίας του ελατηρίου κάθε σπείρα του ισορροπεί δεχόμενη το βάρος της, μια δύναμη προς τα πάνω από την προηγούμενη σπείρα και μια δύναμη προς τα κάτω από την επόμενη. Η κάθε σπείρα θα συνεχίσει να ισορροπεί εφόσον καμιά από αυτές τις δυνάμεις δεν θα μεταβληθεί. Έτσι όταν αφήσουμε ελεύθερη την ακραία προς τα πάνω σπείρα, κάθε σπείρα του ελατηρίου θα παραμείνει ακίνητη μέχρι να συσπειρωθούν όλες οι προηγούμενες. Έτσι το κάτω άκρο του ελατηρίου θα παραμείνει ακίνητο μέχρι να μαζευτεί στη θέση αυτή όλο το ελατήριο.

Στη συνέχεια θα γίνει προσπάθεια της θεωρητικής μελέτης της ισορροπίας του ελατηρίου με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Θεωρώντας το ως συνεχή γραμμική κατανομή μάζας δηλαδή σαν ένα λάστιχο που υπακούει στο νόμο του Hooke, και στη συνέχεια ως ένα πλήθος σπειρών οι οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με βάση το νόμο του Hooke. Συγκεκριμένα θα προσδιοριστεί το μήκος του κρεμασμένου ελατηρίου σε ισορροπία, η θέση του μέσου του και η θέση του κέντρου μάζας του. Στη συνέχεια θα υπολογιστεί ο χρόνος συρρίκνωσης.

Τα θεωρητικά αποτελέσματα θα συγκριθούν με τις μετρήσεις που έγιναν στο εργαστήριο με την βοήθεια της βιντεοσκόπησης σε αργή κίνηση.

1. Συνεχής προσέγγιση

Έστω λάστιχο μάζας M, φυσικού μήκους L και σταθεράς ελαστικότητας k. Δένουμε το ένα άκρο του σε ακλόνητο σημείο και το αφήνουμε να ισορροπήσει κατακόρυφα. Στην κατάσταση αυτή το λάστιχο θα έχει επιμηκυνθεί λόγο του ίδιου του του βάρους και έστω ότι το μήκος του είναι ℓ.



Κάθε στοιχειώδες τμήμα του λάστιχου μήκους dY , όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος, στην θέση Y , θα βρίσκεται σε μια νέα θέση y και θα έχει μήκος dy , όταν το λάστιχο ισορροπεί επιμηκυμένο υπό την επίδραση του βάρους του. Ο στόχος είναι να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $y = f(Y)$.

Η μάζα του στοιχειώδους τμήματος του λάστιχου είναι,

$$dm = \frac{M}{L} dY \tag{1}$$

και η σταθερά ελαστικότητάς του,

$$\kappa = \frac{L}{dY} k \tag{2}$$

Η επιμήκυνση του θεωρούμενου στοιχειώδους τμήματος εξαρτάται από το βάρος του υπόλοιπου λάστιχου από τη θέση αυτή μέχρι το κάτω άκρο. Συγκεκριμένα θα ισχύει,

$$\kappa\left(dy - dY\right) = \frac{Mg}{L}\left(L - Y\right)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (2), ύστερα από μερικές πράξεις,

$$\frac{dy}{dY} = 1 + \frac{Mg}{kL} - \frac{Mg}{kL^2} Y \tag{3}$$

Ολοκληρώνοντας και με δεδομένο ότι $y(0) = 0$, βρίσκουμε τελικά,

$$y(Y) = \left(1 + \frac{Mg}{kL}\right) Y - \frac{Mg}{2kL^2} Y^2 \tag{4}$$

Το μήκος του λάστιχου υπό την επίδραση της βαρύτητας θα είναι,

$$\ell = y(L) = L + \frac{Mg}{2k} \tag{5}$$

ενώ το μέσο Μ του λάστιχου θα βρεθεί στη θέση,

$$y_M = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2} + \frac{3Mg}{8k} \tag{6}$$

Το κέντρο μάζας

Το κέντρο μάζας του λάστιχου όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος ταυτίζεται με το μέσον του, Μ. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο όταν το λάστιχο ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του, αφού η επιμήκυνση δεν είναι ομοιόμορφη και η γραμμική πυκνότητα δεν είναι σταθερή κατά μήκος του.

Έστω y_{cm} η θέση του κέντρου μάζας στο λάστιχο στην κατάσταση ισορροπίας του. Θα είναι,

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^{\ell} y \rho(y) \, dy$$

όπου $\rho\left(y\right)=\dfrac{dm}{dy}$ η γραμμική πυκνότητα στη θέση y.

Παίρνοντας υπόψη τις (1) και (4) αλλάζουμε μεταβλητή και έχουμε,

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^L\left[\left(1+\frac{Mg}{kL}\right)Y-\frac{Mg}{2kL^2}Y^2\right]\frac{M}{L}dY$$

ή κάνοντας τις πράξεις,

$$y_{cm}=\frac{L}{2}+\frac{Mg}{3k} \tag{7}$$

Η αποθηκευμένη ενέργεια

Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα dy του λάστιχου που ισορροπεί έχει αποθηκευτεί ελαστική δυναμική ενέργεια,

$$dE=\frac{1}{2}\kappa\left(dy-dY\right)^2$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2) η τελευταία γίνεται,

$$dE=\frac{1}{2}Lk\left(\frac{dy}{dY}-1\right)^2 dY$$

και λόγω της (3)

$$dE=\frac{M^2g^2}{2kL}\left(1-\frac{Y}{L}\right)^2 dY$$

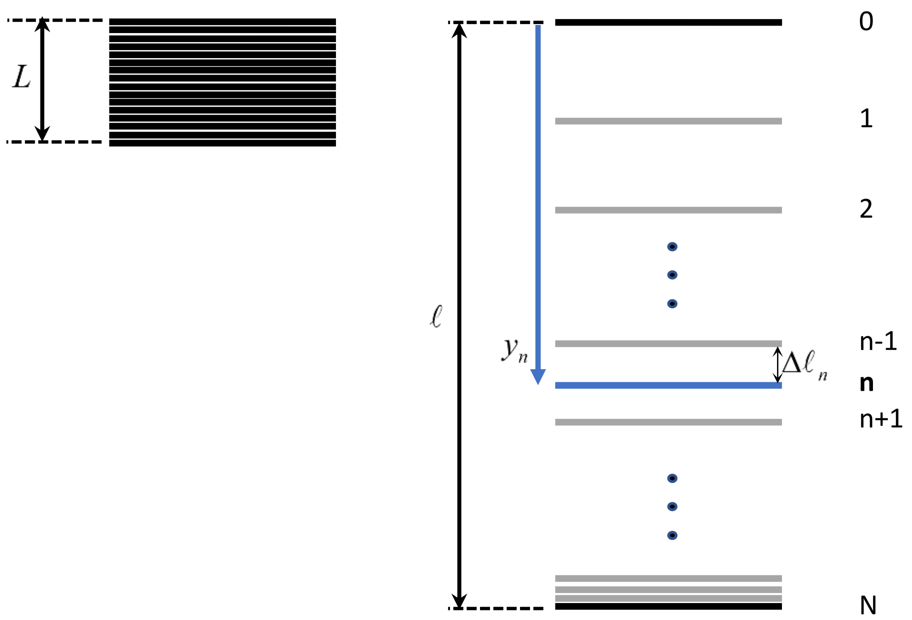
Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε για την αποθηκευμένη ελαστική δυναμική ενέργεια,

$$E=\frac{M^2g^2}{6k} \tag{8}$$

2. Διακριτή προσέγγιση

Μπορούμε να μελετήσουμε το αναρτημένο ελατήριο θεωρώντας ότι κάθε σπείρα βρίσκεται σε μια θέση που είναι η θέση ισορροπίας της και ενώνεται με τις γειτονικές της με άμαζα ελατήρια σταθεράς κ, για τα οποία ισχύει ο νόμος του Hooke.

Έστω $N+1$ το πλήθος των σπειρών, M η μάζα του ελατηρίου και L το μήκος του όταν οι σπείρες του είναι σε επαφή. Αν k η σταθερά ελαστικότητας του ελατηρίου, η σταθερά ελαστικότητας του κάθε «ελατηρίου» μεταξύ δύο διαδοχικών σπειρών θα είναι, $\kappa = Nk$.



Έστω y_n η θέση την n-ιοστής σπείρας. Η συνθήκη ισορροπίας επιβάλει,

$$\kappa \cdot \Delta\ell_n = mg\left(N-n+1\right)$$

όπου $m = \dfrac{M}{N+1}$ η μάζα της κάθε σπείρας. Η τελευταία σχέση γράφεται ως,

$$\Delta\ell_n = \frac{Mg}{k}\frac{N-n+1}{N\left(N+1\right)} \tag{9}$$

Για την θέση y_n θα έχουμε,

$$y_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta\ell_i + \frac{n+1}{N+1}L$$

όπου ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους της τελευταίας είναι το συνολικό πάχος των $n+1$ σπειρών και ο πρώτος το άθροισμα των επιμηκύνσεων μέχρι την n-ιοστή σπείρα. Αντικαθιστώντας από την (…….),

$$y_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{Mg}{k}\frac{N-i+1}{N\left(N+1\right)} + \frac{n+1}{N+1}L$$

ή

$$y_n = \frac{Mg}{k}\left(\frac{1}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{n} N - i + 1\right) + \frac{n+1}{N+1}L$$

ή

$$y_n = \frac{Mg}{kN(N+1)}\left(n(N+1) - \frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{n+1}{N+1}L$$

ή

$$y_n = \frac{Mg}{k}\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n+1}{2(N+1)}\right) + \frac{n+1}{N+1}L \qquad (10)$$

Το μήκος του ελατηρίου θα είναι, $\ell = y_N$, ή

$$\ell = L + \frac{Mg}{2k} \qquad (11)$$

Η θέση της μεσαίας σπείρας, θα είναι,

$$y_M = y_{N/2} = \frac{Mg}{2k}\left(1 - \frac{N+2}{4(N+1)}\right) + \frac{N+2}{2(N+1)}L$$

ή για $N \gg 1$,

$$y_M = \frac{L}{2} + \frac{3Mg}{8k} \qquad (12)$$

Το κέντρο μάζας

Η θέση του κέντρου μάζας θα δοθεί από τη σχέση,

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m y_i$$

όπου $m = \dfrac{M}{N+1}$ η μάζα της κάθε σπείρας. Αντικαθιστώντας από την (10),

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\frac{M}{N+1}\left(\frac{Mg}{k}\frac{i}{N}\left(1 - \frac{i+1}{2(N+1)}\right) + \frac{i+1}{N+1}L\right)$$

Μετά τις πράξεις, και χρησιμοποιώντας τα αθροίσματα, $\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$ και $\sum_{i=1}^{N} i(i+1) = \frac{N(N+1)(N+2)}{3}$

βρίσκουμε,

$$y_{cm} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{Mg}{k}\frac{2N+1}{6} + \frac{N(N+3)}{2(N+1)}L\right)$$

$$y_{cm} = \frac{Mg}{6k}\frac{2N+1}{N+1} + \frac{N(N+3)}{2(N+1)^2}L$$

ή για $N \gg 1$,

$$y_{cm} = \frac{L}{2} + \frac{Mg}{3k} \tag{13}$$

Η αποθηκευμένη ενέργεια

Η ελαστική δυναμική ενέργεια λόγω της n-ιοστής παραμόρφωσης είναι,

$$E_n = \frac{1}{2}\kappa \cdot \Delta\ell_n^{\ 2}$$

και αντικαθιστώντας από την (9),

$$E_n = \frac{M^2 g^2}{2kN(N+1)^2}(N-n+1)^2$$

Αθροίζοντας έχουμε,

$$E = \frac{M^2 g^2}{2kN(N+1)^2}\sum_{n=1}^{N}(N-n+1)^2$$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{N}(N-n+1)^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2$ αφού οι όροι του πρώτου αθροίσματος είναι ίδιοι με αυτούς του δεύτερου, απλώς με διαφορετική σειρά καθώς ο δείκτης n "τρέχει" από το 1 έως το N . Άρα,

$$E = \frac{M^2 g^2}{2kN(N+1)^2}\sum_{n=1}^{N} n^2$$

και τελικά,

$$E = \frac{M^2 g^2}{12k}\frac{2N+1}{N+1}$$

αφού, $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

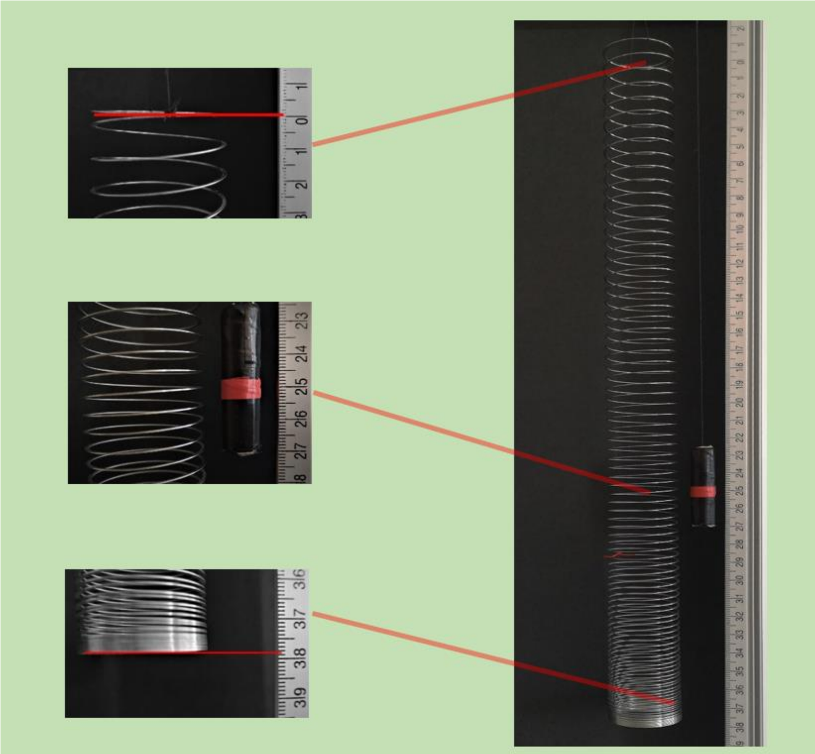
Για $N \gg 1$, βρίσκουμε,

$$E = \frac{M^2 g^2}{6k} \tag{14}$$

Παρατηρούμε ότι για $N \gg 1$, τα αποτελέσματα ταυτίζονται με αυτά που προέκυψαν από το μοντέλο της συνεχούς κατανομής (λάστιχο) όπως ήταν αναμενόμενο.

Στο εργαστήριο

Η θεωρητική μελέτη για την ισορροπία και την πτώση του ελατηρίου ελέγχθηκε στο εργαστήριο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε το ελατήριο της αρχικής εικόνας (και του βίντεο), με τα εξής χαρακτηριστικά:



Μάζα: $M = 27,5g$
Μήκος σε συσπείρωση: $L = 31,5\ mm$
Πλήθος σπειρών: $N = 93$

Το μήκος του ελατηρίου όταν ισορροπεί κατακόρυφα κρεμασμένο από την πρώτη σπείρα του είναι, $\ell = 0,378m$. Από την (11) υπολογίζουμε, $\dfrac{Mg}{k} = 0.693\ m$ και με βάση αυτό το αποτέλεσμα βρίσκουμε από την (13) για το κέντρο μάζας, $y_{cm} = 0,247m$. Ο έλεγχος της ορθότητας της θέσης του κέντρου μάζας μπορεί να γίνει ως εξής:

Η κίνηση του κέντρου μάζας του ελατηρίου από τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο ταυτίζεται με την κίνηση ενός σώματος που βρίσκεται αρχικά στο ίδιο ύψος και αρχίζει ταυτόχρονα με το ελατήριο να πέφτει ελεύθερα.

Αυτό φαίνεται στο παρακάτω βίντεο, στο οποίο το νήμα από το οποίο αναρτάται το ελατήριο έχει δεμένο στο άλλο άκρο του ένα κυλινδρικό σιδερένιο βαρίδι με μάζα ίση με αυτήν του ελατηρίου. Στο μέσον του έχει τυλιχτεί μια στενή λωρίδα κόκκινης ταινίας, το μέσον της οποίας αρχικά βρίσκεται στη θέση, 25cm, δηλαδή στην θεωρητικά υπολογιζόμενη θέση του κέντρου μάζας. Το νήμα είναι περασμένο από ακλόνητο στήριγμα και κάποια στιγμή καίγεται οπότε το ελατήριο και το βαρίδι ελευθερώνονται ταυτόχρονα και πέφτουν. Το φαινόμενο μαγνητοσκοπήθηκε σε αργή κίνηση, 1/32, (λήψη στα 960fps και αναπαραγωγή στα 30 fps).

Από τη στιγμή της απελευθέρωσης μέχρι την συσπείρωση του ελατηρίου το κέντρο μάζας θα πέσει κατά,

$$h = \ell - y_{cm} - \frac{L}{2}$$

και αντικαθιστώντας από τις (11) και (13),

$$h = \frac{Mg}{6k}$$

Άρα ο χρόνος συσπείρωσης του ελατηρίου θα είναι,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{M}{3k}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την τιμή, $\frac{Mg}{k} = 0.693\ m$, και ότι $g \cong 9{,}81\ {}^{m}\!/\!{}_{s^2}$, ο αναμενόμενος χρόνος πτώσης υπολογίζεται στην τιμή, $t = 0{,}153\ s$.

Η μέτρηση του χρόνου με τη βοήθεια της βιντεοσκόπησης έδωσε αποτέλεσμα, $t_{μετρ} = 0{,}148\ s$.

Δείτε το βίντεο: https://youtu.be/Un5g7O-Adok

Για μια πιο διεξοδική μελέτη του φαινομένου,

https://vanderbei.princeton.edu/WebGL/slinky.pdf

https://arxiv.org/abs/1208.4629

και σε αρκετές ακόμα σχετικές δημοσιεύσεις, στο διαδίκτυο.

Λευκάδα 2021

Σπύρος Χόρτης