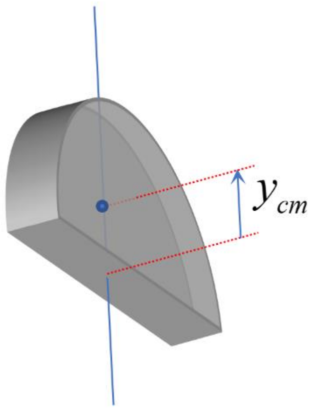
Πειραματικός προσδιορισμός της θέσης του κέντρου μάζας

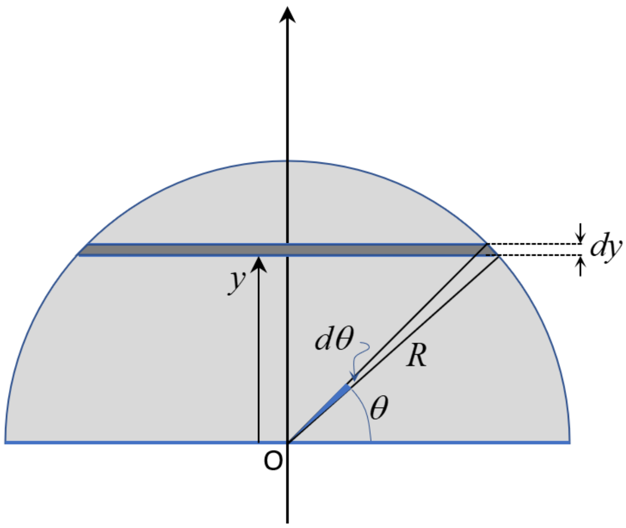
Έστω μια κυλινδρική "φέτα" από ένα ομογενές υλικό την οποία την έχουμε κόψει στη μέση με μια τομή κάθετη στις δύο βάσεις της. Ένα τέτοιο στερεό είναι και αυτό της φωτογραφίας το οποίο χρησιμοποιούμε στο εργαστήριο για τη μελέτη της οπτικής. Ο προσδιορισμός του κέντρου μάζας του στερεού μπορεί να είναι μια καλή άσκηση για πρωτοετείς φοιτητές ή και για μαθητές της Γ λυκείου με ιδιαίτερες ικανότητες. Θα δούμε όμως ότι ο προσδιορισμός μπορεί να γίνει με πολύ μεγάλη ακρίβεια και στο εργαστήριο.

Ο θεωρητικός υπολογισμός

Το κέντρο μάζας θα βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του στερεού. Θεωρώντας ως αρχή το σημείο τομής του άξονα με το ορθογώνιο που προέκυψε από την τομή της "φέτας", η θέση του κέντρου μάζας θα υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα:

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int y dm$$





Εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία βρίσκουμε εύκολα τη θέση του κέντρου μάζας, χωρίζοντας το στερεό σε στοιχειώδεις μάζες όπως στο παραπάνω σχήμα.

Παρατηρώντας ότι, $dm = 2\sigma R\cos\theta dy$, $y = R\sin\theta$ και $dy = R\cos\theta d\theta$ όπου $\sigma = \dfrac{2m}{\pi R^2}$ η επιφανειακή πυκνότητα, το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται,

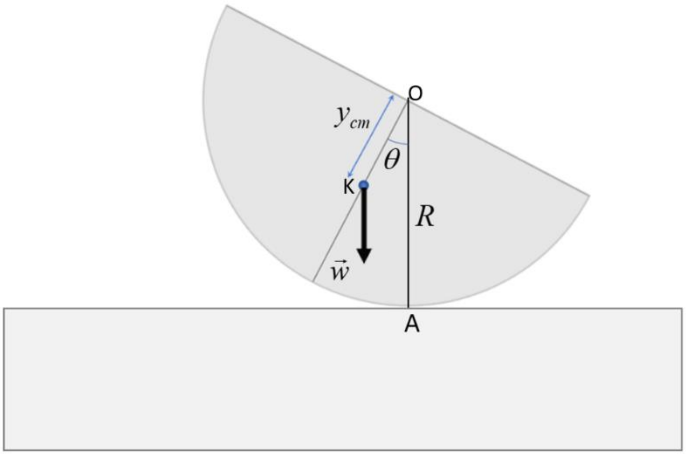
$$y_{cm} = \frac{4}{\pi}R\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίζουμε, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{3}$, οπότε,

$$y_{cm} = \frac{4}{3\pi}R \qquad \text{ή} \qquad \frac{y_{cm}}{R} = \frac{4}{3\pi} \tag{1}$$

Στο εργαστήριο

Τοποθετώντας το στερεό σε μια επίπεδη οριζόντια επιφάνεια με την ημικυκλική πλευρά να ακουμπά σε αυτήν, το στερεό ισορροπεί ευσταθώς με τον άξονά του κατακόρυφο. Αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας δημιουργείται ροπή επαναφοράς η οποία τείνει να επαναφέρει το στερεό στη θέση ισορροπίας του. Αρκεί μια, μικρή σχετικά, τιμή του συντελεστή οριακής τριβής ώστε για μικρές γωνίες εκτροπής να μην πραγματοποιείται ολίσθηση. Συγκεκριμένα για τυχαία γωνία εκτροπής θ θα έχουμε, ως προς τον στιγμιαίο άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής (σημείο Α στο σχήμα) με το επίπεδο,



$$\sum \tau = \tau_w = -mgy_{cm}\sin\theta \tag{2}$$

Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον ίδιο άξονα θα είναι,

$$I_A = I_{cm} + m\left(AK\right)^2$$

Επίσης,

$$I_{cm} = I_O - my_{cm}^2 \quad \text{και} \quad I_O = \frac{1}{2}mR^2$$

θεωρώντας γνωστή τη ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις και αντικαθιστώντας την απόσταση ΑΚ από το νόμο των συνημιτόνων, προκύπτει,

$$I_A = \frac{1}{2}mR^2 - my_{cm}^2 + m\left(R^2 + y_{cm}^2 - 2Ry_{cm}\cos\theta\right)$$

και μετά από λίγες πράξεις,

$$I_A = mR\left(\frac{3}{2}R - 2y_{cm}\cos\theta\right) \tag{3}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2) και (3) ο θεμελιώδης νόμος μας δίνει,

$$R\left(\frac{3}{2}R - 2y_{cm}\cos\theta\right)\ddot{\theta} + gy_{cm}\sin\theta = 0$$

ή θέτοντας, $\dfrac{y_{cm}}{R} = \lambda$,

$$\left(\frac{3}{2}R - 2\lambda R\cos\theta\right)\ddot{\theta} + g\lambda\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

Η εξίσωση (4) δεν επιδέχεται αναλυτική λύση αλλά …

Αν περιοριστούμε σε μικρές γωνίες ταλάντωσης, μπορούμε να κάνουμε τις προσεγγίσεις, $\sin\theta \cong \theta$ και $\cos\theta \cong 1$, και η (4) γίνεται,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R\left(\frac{3}{2\lambda} - 2\right)}\theta = 0$$

που είναι εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης με γωνιακή συχνότητα, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R\left(\frac{3}{2\lambda} - 2\right)}}$ αφού προφανώς $\lambda < 0{,}5$.

Άρα για μικρές γωνίες η κίνηση του στερεού είναι σχεδόν αρμονική κίνηση με περίοδο που ικανοποιεί τη σχέση,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{R\left(\frac{3}{2\lambda} - 2\right)}$$

ή λύνοντας ως προς λ

$$\lambda = \frac{3}{\frac{gT^2}{2\pi^2 R} + 4} \qquad (5)$$

Η περίοδος της κίνησης μετρήθηκε με μεγάλη ακρίβεια με βιντεοσκόπησή της και ανάλυση του βίντεο και βρέθηκε ίση με, $T = 0{,}463s$ ενώ η ακτίνα του στερεού που χρησιμοποιήθηκε είναι $R = 35mm = 0{,}035m$

Δείτε το βίντεο: https://youtu.be/fDspXgFFwZ0

Έτσι αντικαθιστώντας και την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας, $g = 9.8\frac{m}{s^2}$, βρίσκουμε, στρογγυλοποιώντας στο 3ο δεκαδικό ψηφίο,

$$\lambda = 0{,}426$$

ενώ η θεωρητική τιμή από την (1) είναι,

$$\lambda = \frac{4}{3\pi} \cong 0{,}424$$

Το σφάλμα του υπολογισμού είναι μικρότερο του 0,5% !!!

Σπύρος Χόρτης - Φυσικός