

Αποτύπωση του μαγνητικού πεδίου ρευματοφόρων αγωγών χωρίς αισθητήρα μαγνητικού πεδίου

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου γύρω από ρευματοφόρο αγωγό είναι ανάλογη της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό και εξαρτάται από τη θέση του σημείου στο χώρο σε σχέση με την κατανομή του ηλεκτρικού ρεύματος. Αυτή η εξάρτηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου από τη θέση του κάθε σημείου καθορίζει και τη μορφή του μαγνητικού φάσματος και μας περιγράφει ποιοτικά την μορφή του μαγνητικού πεδίου.

Αν θέλουμε να περιγράψουμε επομένως την μορφή του μαγνητικού πεδίου γύρω από ρευματοφόρο αγωγό πρέπει να απεικονίσουμε την εξάρτηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου από τη θέση. Αυτή η διαδικασία μπορεί πειραματικά να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας έναν αισθητήρα μαγνητικού πεδίου, μετρώντας την ένταση του πεδίου σε διάφορα σημεία και λαμβάνοντας υπόψη την ενδεχόμενη συμμετρία.

Μπορούμε όμως να πραγματοποιήσουμε τη διαδικασία στο εργαστήριο **χωρίς να διαθέτουμε κάποιον εξειδικευμένο αισθητήρα μαγνητικού πεδίου** με τον τρόπο που περιγράφεται στη συνέχεια, και να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με την θεωρητική πρόβλεψη.

Ο "αισθητήρας" και η αποτύπωση του πεδίου

Στο ένα άκρο ενός λεπτού πλαστικού σωλήνα (διάμετρος 4mm) τυλίγουμε πολλές φορές λεπτό μονωμένο χάλκινο σύρμα όπως φαίνεται στις φωτογραφίες. Οι δύο άκρες του σύρματος καταλήγουν σε δύο ακροδέκτες και μπορούν να συνδεθούν με πολύμετρο.



Αν ο αγωγός διαρρέεται από αρμονικά εναλλασσόμενο ρεύμα ορισμένης συχνότητας, θα έχουμε σε κάθε σημείο γύρω από τον αγωγό, μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο με ένταση που θα μεταβάλλεται και αυτή αρμονικά με το χρόνο. Αν τοποθετήσουμε το άκρο του «αισθητήρα» σε κάποιο σημείο του χώρου γύρω από τον αγωγό θα τότε θα εμφανίζεται στα άκρα του ΗΕΔ από επαγωγή την οποία μπορούμε να μετράμε συνδέοντας το πολύμετρο.

Αν $B = B_0 \eta\mu(\omega t)$ είναι η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου που είναι παράλληλη στον άξονα του αισθητήρα τότε η επαγωγική ΗΕΔ στα άκρα του πηνίου είναι:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NA \frac{dB}{dt} = -NAB_0 \omega \nu(\omega t)$$

και η τάση που μετράει το πολύμετρο θα είναι η ενεργός τιμή της επαγωγικής τάσης, δηλ.: $V = \frac{NAB_0}{\sqrt{2}}$.

Συνεπώς η ένδειξη του πολυμέτρου θα είναι ανάλογη του πλάτους της συνιστώσας του μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου που είναι παράλληλη στον άξονα του αισθητήρα.

Μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό του αισθητήρα μπορούμε να διαπιστώσουμε την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, βρίσκοντας ποιος είναι ο προσανατολισμός του όταν μεγιστοποιηθεί η ένδειξη του

πολυμέτρου. Αυτό βέβαια δεν είναι απαραίτητο αν η διεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι γνωστή λόγω συμμετρίας.

Συνεπώς, τοποθετώντας τον αισθητήρα με τον άξονά του παράλληλο στο μαγνητικό πεδίο που παράγεται από κάποιο ρευματοφόρο αγωγό, η τάση από επαγωγή σε διάφορα σημεία γύρω από τον αγωγό είναι ανάλογη του πλάτους της έντασης του μαγνητικού πεδίου και η χωρική εξάρτηση θα είναι ίδια με την χωρική εξάρτηση της έντασης του πεδίου που δημιουργεί και ένα χρονικά σταθερό ρεύμα.

Μετρήσεις - σύγκριση με το θεωρητικό μοντέλο

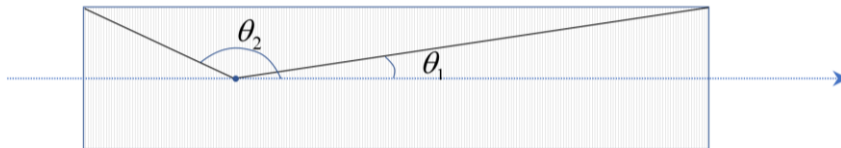
A. Κατά μήκος του άξονα ρευματοφόρου σωληνοειδούς πεπερασμένου μήκους

Θεωρητικές επισημάνσεις

Με εφαρμογή του νόμου των Biot-Savart η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε σημείο του άξονα του σωληνοειδούς δίνεται από τη σχέση:

$$B = 2\pi k_{\mu} n I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

όπου n η πυκνότητα σπειρών, I η ένταση του ρεύματος και θ_1 , θ_2 οι γωνίες που φαίνονται στο σχήμα.



Για σωληνοειδές μήκους ℓ και με ακτίνα σπειρών R , η ένταση του μαγνητικού πεδίου σαν συνάρτηση της απόστασης x από το μέσο του, γράφεται:

$$B(x) = 2\pi k_{\mu} n I \left(\frac{\frac{\ell}{2} + x}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} + x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{\ell}{2} - x}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2 + R^2}} \right)$$

Στο όριο $\ell \rightarrow \infty$, προκύπτει $B = 4\pi k_{\mu} n I = B_0$ όπως αναμένεται. Παρατηρούμε ότι $B(x) = B(-x)$ το οποίο επίσης είναι αναμενόμενο, καθώς και ότι $B\left(\frac{\ell}{2}\right) = B\left(-\frac{\ell}{2}\right) = 2\pi k_{\mu} n I = B_0 / 2$.

Πειραματική διερεύνηση

Το σωληνοειδές της φωτογραφίας έχει μήκος 29cm και η διάμετρος των σπειρών του είναι ίση με 2,2cm. Δηλαδή $\ell = 29\text{cm}$ και $R = 1,1\text{cm}$.



Η ένταση του μαγνητικού πεδίου πάνω στον άξονα του σωληνοειδούς σαν συνάρτηση της απόστασης x από το μέσο του, θα δίνεται θεωρητικά από την έκφραση:

$$B_{\text{θεωρ}}(x) = c_1 \left(\frac{14,5 + x}{\sqrt{(14,5 + x)^2 + 1,21}} + \frac{14,5 - x}{\sqrt{(14,5 - x)^2 + 1,21}} \right)$$

όπου c_1 σταθερά που εξαρτάται από τα υπόλοιπα μεγέθη εκτός της θέσης x .

Στο πείραμα που μπορείτε να δείτε στο [βίντεο](#), το συγκεκριμένο σωληνοειδές διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα ενεργού έντασης περίπου 5A. Παίρνοντας μετρήσεις κατά μήκος του άξονα του σωληνοειδούς από το μέσον του μέχρι και έξω από αυτό καταγράφουμε τιμές της επαγωγικής τάσης που φαίνονται στον πίνακα.

Πίνακας 1: Πειραματικά δεδομένα

| X (cm) | V (mV) | X (cm) | V (mV) | X (cm) | V (mV) | X (cm) | V (mV) |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 6,8 | 7,0 | 6,7 | 12,5 | 6,2 | 16,0 | 0,6 |
| 1,0 | 6,8 | 8,0 | 6,8 | 13,0 | 5,8 | 16,5 | 0,4 |
| 2,0 | 6,8 | 9,0 | 6,6 | 13,5 | 5,3 | 17,0 | 0,2 |
| 3,0 | 6,7 | 10,0 | 6,6 | 14,0 | 4,5 | 17,5 | 0,1 |
| 4,0 | 6,7 | 11,0 | 6,5 | 14,5 | 3,3 | 18,0 | 0,1 |
| 5,0 | 6,8 | 11,5 | 6,5 | 15,0 | 2,0 | 18,5 | 0,1 |
| 6,0 | 6,8 | 12,0 | 6,4 | 15,5 | 1,1 | | |

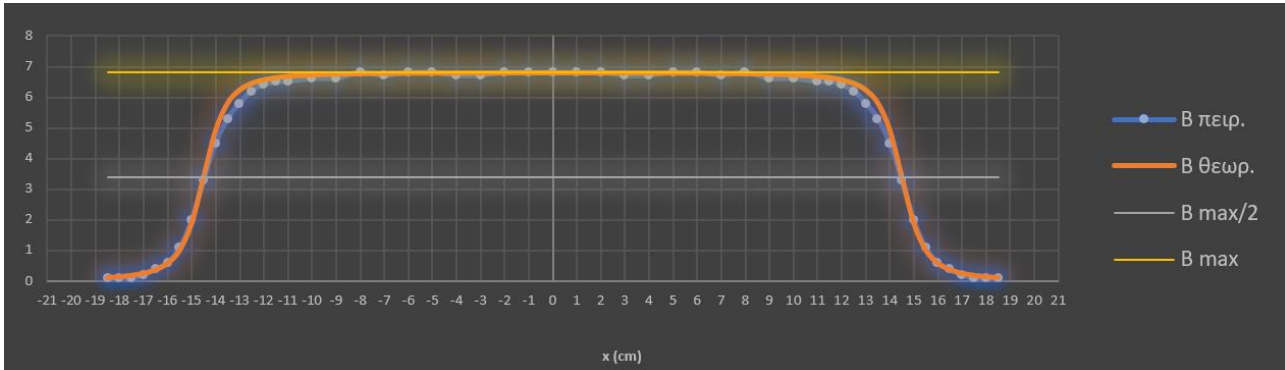
Το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι ανάλογο της μετρούμενης τάσης, δηλαδή,

$$B_{\text{πειρ}}(x) = c_2 V(x)$$

και για να συγκρίνουμε την μορφή του πεδίου όπως υπολογίζεται πειραματικά με τη μορφή που προκύπτει θεωρητικά θα απαιτήσουμε να συμφωνούν οι τιμές στο κέντρο του σωληνοειδούς.

$$B_{\text{θεωρ}}(0) = B_{\text{πειρ}}(0) \Rightarrow 1,995c_1 = 6,8c_2 \Rightarrow c_1 = 3,408c_2$$

Θέτοντας $c_2 = 1$ και σχεδιάζοντας σε κοινό διάγραμμα την εξάρτηση της έντασης όπως προκύπτει θεωρητικά και όπως προκύπτει από τις πειραματικές μετρήσεις έχουμε την παρακάτω εικόνα.



Η ταύτιση της πειραματικής διερεύνησης με το θεωρητικό μοντέλο είναι αρκετά καλή και παρατηρώντας τα αποτελέσματα μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε την σταθερότητα του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, δηλαδή μακριά από τα άκρα του.

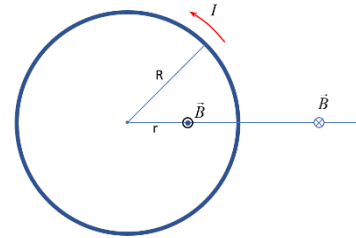
Παρατήρηση: Όπως προκύπτει από την θεωρητική περιγραφή μετά από στοιχειώδεις υπολογισμούς, για την ένταση του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς, θεωρητικά απείρου μήκους, συμπεραίνουμε τα εξής:

Το 99% του μέτρου της έντασης οφείλεται στο τμήμα του σωληνοειδούς μήκους ίσου με $7R$ εκατέρωθεν του σημείου, ενώ το 98% στο αντίστοιχο τμήμα που εκτείνεται μέχρι περίπου $5R$ εκατέρωθεν του σημείου. Έτσι αν διαθέτουμε ένα σωληνοειδές που έχει μήκος περίπου $14\pi R$ από την ακτίνα των σπειρών του (ή και μεγαλύτερο) μπορούμε να θεωρούμε με πολύ καλή προσέγγιση το πεδίο στο εσωτερικό του ομογενές και έντασης που δίνεται από τη σχέση για το σωληνοειδές απείρου μήκους, μέχρι να φτάσουμε περίπου σε απόσταση περίπου $5R$ από τα άκρα του. Με τα συμπεράσματα αυτά «συμφωνούν» και τα πειραματικά αποτελέσματα όπως φαίνεται στο προηγούμενο γράφημα.

Β. Κατά μήκος μιας διαμέτρου ενός ρευματοφόρου κυκλικού πλαισίου

Θεωρητικές επισημάνσεις

Έστω κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός με το επίπεδό του να ταυτίζεται με το επίπεδο xy και το κέντρο του στην αρχή O του συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ και η φορά του ρεύματος είναι αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού όπως την βλέπει παρατηρητής στην προέκταση που βρίσκεται σε σημείου του θετικού ημιάξονα Oz .



Η εφαρμογή του νόμου Biot-Savart δίνει για κάθε σημείο του επιπέδου του κυκλικού αγωγού που απέχει απόσταση r από το κέντρο του, μαγνητική επαγωγή που δίνεται από τη σχέση,

$$\vec{B} = \left(\frac{k_{\mu} I}{R} \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{r}{R} \sin \varphi\right)}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \sin \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right) \hat{z}$$

όπου \hat{z} το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα z . Προφανώς η διεύθυνση της έντασης του πεδίου είναι κάθετη στο επίπεδο του αγωγού. Θέτοντας, $\frac{r}{R} = \lambda$, το αποτέλεσμα γράφεται,

$$\vec{B} = \left(\frac{k_{\mu} I}{R} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \lambda \sin \varphi}{\left(1 + \lambda^2 - 2\lambda \sin \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right) \hat{z}$$

Η τιμή του ολοκληρώματος προκύπτει σαν συνάρτηση ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και είναι,

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \lambda \sin \varphi}{\left(1 + \lambda^2 - 2\lambda \sin \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = 2 \frac{(1 - \lambda) K\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda + 1}\right) + (1 + \lambda) E\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda + 1}\right)}{1 - \lambda^2}$$

όπου $K(k)$, $E(k)$, με $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda + 1}$, τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα 1^{ου} και 2^{ου} είδους αντίστοιχα.

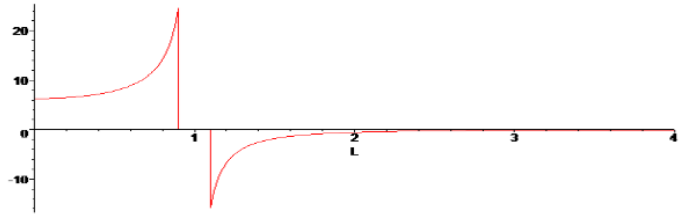
Έτσι το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί ως,

$$\vec{B} = \frac{k_{\mu} I}{R} J \cdot \hat{z}$$

Μια μηχανή υπολογισμού των τιμών των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων 1^{ου} και 2^{ου} είδους μπορείτε να δείτε στη διεύθυνση: <https://keisan.casio.com/exec/system/1180573454> ή χρησιμοποιήστε τους [πίνακες](#).

Παρατηρούμε ότι για $\lambda = 0$, $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$ οπότε προκύπτει, $J = 2\pi$ που είναι το γνωστό αποτέλεσμα για το κέντρο του αγωγού.

Στο διπλανό γράφημα φαίνεται η τιμή του ολοκληρώματος J σαν συνάρτηση του λόγου λ για $0 \leq \lambda \leq 0,9$ και $1,1 \leq \lambda \leq 4$



Επομένως η θεωρητική τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου θα δίνεται από τη σχέση,

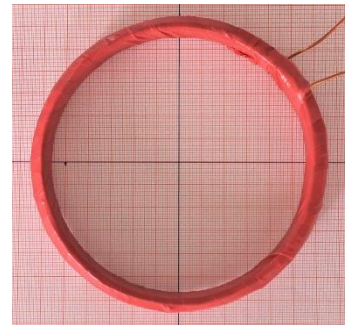
$$B_{\text{θεωρ}}(\lambda) = c_1 J(\lambda)$$

όπου c_1 σταθερά που εξαρτάται από όλους τους άλλους παράγοντες εκτός από το λόγο λ .

Πειραματική διερεύνηση

Το κυκλικό πλαίσιο της φωτογραφίας αποτελείται από περίπου 50 σπείρες μονωμένου χάλκινου σύρματος και έχει μέση ακτίνα $R = 6\text{cm}$.

Στο [βίντεο](#) φαίνεται η διαδικασία λήψης μετρήσεων της έντασης του μαγνητικού πεδίου με τον αυτοσχέδιο αισθητήρα, ξεκινώντας από το κέντρο του και κατά μήκος μιας ακτίνας του και της προέκτασής της. Το πλαίσιο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα και είναι τοποθετημένο στον πάγκο εργασίας πάνω σε μια σελίδα μιλιμετρικού χαρτιού για διευκόλυνση της διαδικασίας. Οι μετρήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.



Πίνακας 2: Πειραματικά δεδομένα

| r(cm) | V(mV) | r(cm) | V(mV) | r(cm) | V(mV) |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | 5,4 | 6,7 | 7 | 12,5 | 0,3 |
| 0,5 | 5,5 | 7,0 | 5 | 13,0 | 0,3 |
| 1,0 | 5,6 | 7,5 | 3,2 | 13,5 | 0,2 |
| 1,5 | 5,8 | 8,0 | 2,2 | 14,0 | 0,2 |
| 2,0 | 5,9 | 8,5 | 1,6 | 14,5 | 0,2 |
| 2,5 | 6,3 | 9,0 | 1,3 | 15,0 | 0,2 |
| 3,0 | 6,8 | 9,5 | 1 | 15,5 | 0,1 |
| 3,5 | 7,4 | 10,0 | 0,8 | 16,0 | 0,1 |
| 4,0 | 8,4 | 10,5 | 0,7 | 16,5 | 0,1 |
| 4,5 | 10 | 11,0 | 0,5 | 17,0 | 0,1 |
| 5,0 | 12,9 | 11,5 | 0,5 | 17,5 | 0,1 |
| 5,5 | -- | 12,0 | 0,4 | 18,0 | 0,1 |
| 6,0 | -- | | | | |

Το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι ανάλογο της μετρούμενης τάσης από επαγωγή που αναπτύσσεται στον αισθητήρα όπως έχουμε αναφέρει. Δηλαδή, αλλάζοντας μεταβλητή θα έχουμε μια σχέση της μορφής,

$$B_{\text{πειρ}}(\lambda) = c_2 V(\lambda)$$

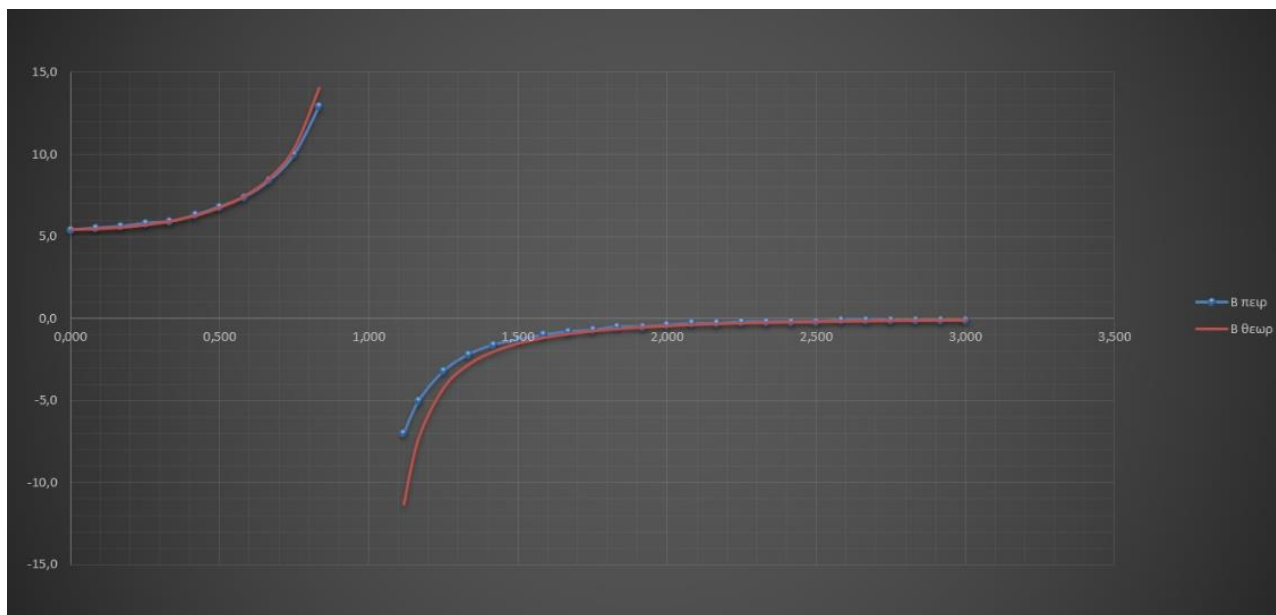
Όπως και στην περίπτωση του σωληνοειδούς μπορούμε να συγκρίνουμε ποιοτικά τα πειραματικά αποτελέσματα με την θεωρητική πρόβλεψη επιλέγοντας τις σταθερές ώστε,

$$B_{\text{θεωρ}}(0) = B_{\text{πειρ}}(0) \Rightarrow c_1 J(0) = c_2 V(0) \Rightarrow 2\pi c_1 = 5,4c_2 \Rightarrow c_1 = 0.859c_2$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι σχετικές τιμές (θεωρητικές και πειραματικές) για $c_2 = 1$ με βάση τις οποίες γίνεται το σχετικό γράφημα.

| r (cm) | $\lambda=r/R$ | J(λ) | B πειρ | B θεωρ |
|--------|---------------|----------------|--------|--------|
| 0,0 | 0,000 | 6,283 | 5,4 | 5,4 |
| 0,5 | 0,083 | 6,316 | 5,5 | 5,4 |
| 1,0 | 0,167 | 6,418 | 5,6 | 5,5 |
| 1,5 | 0,250 | 6,596 | 5,8 | 5,7 |
| 2,0 | 0,333 | 6,868 | 5,9 | 5,9 |
| 2,5 | 0,417 | 7,262 | 6,3 | 6,2 |
| 3,0 | 0,500 | 7,826 | 6,8 | 6,7 |
| 3,5 | 0,583 | 8,653 | 7,4 | 7,4 |
| 4,0 | 0,667 | 9,922 | 8,4 | 8,5 |
| 4,5 | 0,750 | 12,055 | 10,0 | 10,4 |
| 5,0 | 0,833 | 16,298 | 12,9 | 14,0 |
| 5,5 | 0,917 | | | |
| 6,0 | 1,000 | | | |
| 6,7 | 1,117 | -13,191 | -7,0 | -11,3 |
| 7,0 | 1,167 | -8,471 | -5,0 | -7,3 |
| 7,5 | 1,250 | -4,960 | -3,2 | -4,3 |
| 8,0 | 1,333 | -3,308 | -2,2 | -2,8 |
| 8,5 | 1,417 | -2,375 | -1,6 | -2,0 |
| 9,0 | 1,500 | -1,789 | -1,3 | -1,5 |

| r (cm) | $\lambda=r/R$ | J(λ) | B πειρ | B θεωρ |
|--------|---------------|----------------|--------|--------|
| 9,5 | 1,583 | -1,395 | -1,0 | -1,2 |
| 10,0 | 1,667 | -1,116 | -0,8 | -1,0 |
| 10,5 | 1,750 | -0,911 | -0,7 | -0,8 |
| 11,0 | 1,833 | -0,756 | -0,5 | -0,7 |
| 11,5 | 1,917 | -0,636 | -0,5 | -0,6 |
| 12,0 | 2,000 | -0,542 | -0,4 | -0,5 |
| 12,5 | 2,083 | -0,466 | -0,3 | -0,4 |
| 13,0 | 2,167 | -0,404 | -0,3 | -0,4 |
| 13,5 | 2,250 | -0,353 | -0,2 | -0,3 |
| 14,0 | 2,333 | -0,310 | -0,2 | -0,3 |
| 14,5 | 2,417 | -0,275 | -0,2 | -0,2 |
| 15,0 | 2,500 | -0,244 | -0,2 | -0,2 |
| 15,5 | 2,583 | -0,219 | -0,1 | -0,2 |
| 16,0 | 2,667 | -0,196 | -0,1 | -0,2 |
| 16,5 | 2,750 | -0,177 | -0,1 | -0,2 |
| 17,0 | 2,833 | -0,160 | -0,1 | -0,1 |
| 17,5 | 2,917 | -0,156 | -0,1 | -0,1 |
| 18,0 | 3,000 | -0,133 | -0,1 | -0,1 |



Παρατηρούμε πολύ καλή ταύτιση του πειραματικού αποτελέσματος με το θεωρητικό μοντέλο με εξαίρεση τα σημεία κοντά στο πλαίσιο, κάτι που είναι αναμενόμενο αφού στο θεωρητικό μοντέλο θεωρούμε το πάχος του πλαισίου αμελητέο.

Ενδεικτικές αναφορές για το θεωρητικό μέρος.

Jackson J.D. - Classical Electrodynamics

Pollack & Stump - Electromagnetism