Φθίνουσα ταλάντωση

Σύντομη θεωρία

Έστω ταλαντωτής μάζας m, σταθεράς επαναφοράς D, στον οποίο ασκείται δύναμη αντίστασης της μορφής $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -b\vec{v}$ (όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα). Η εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα οδηγεί στη διαφορική εξίσωση,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Dx = 0$$

ή θέτοντας $\frac{b}{2m} = \Lambda$ και $\frac{D}{m} = \omega_0^2$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x = x(t)}$$

Η (1) είναι γραμμική ομογενής Δ.Ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.
Από τη σχετική θεωρία προκύπτει η γενική λύση:

$$\boxed{x = e^{-\Lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right)} \quad \text{για } \Lambda \neq \omega_0$$

και

$$\boxed{x = \left(C_3 + C_4 t\right)e^{-\Lambda t}} \quad \text{για } \Lambda = \omega_0$$

Οι σταθερές C_1 ,C_2, C_3 και C_4 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Έστω $x(0) = x_0$ και $v(0) = v_0$.
Για $\Lambda \neq \omega_0$ έχουμε το σύστημα:

$$C_1 + C_2 = x_0$$

$$-\Lambda\left(C_1 + C_2\right) + \sqrt{\Lambda^2 - \omega_0^2}\left(C_1 - C_2\right) = v_0$$

από το οποίο προκύπτει,

$$C_1 = \frac{\left(\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2} + \Lambda\right)x_0 + v_0}{2\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}} \quad \text{και} \quad C_2 = \frac{\left(\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2} - \Lambda\right)x_0 - v_0}{2\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}}$$

ενώ για $\Lambda = \omega_0$ έχουμε:

$$C_3 = x_0 \quad \text{και} \quad C_4 = \Lambda x_0 + v_0$$

Συνοψίζοντας η γενική λύση είναι:

$$\boxed{x = \begin{cases} e^{-\Lambda t}\left[\dfrac{\left(\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}+\Lambda\right)x_0 + v_0}{2\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}}e^{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t} + \dfrac{\left(\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}-\Lambda\right)x_0 - v_0}{2\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}}e^{-\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right] & \Lambda \neq \omega_0 \\ e^{-\Lambda t}\left[x_0 + \left(\Lambda x_0 + v_0\right)t\right] & \Lambda = \omega_0 \end{cases}}$$

Στην περίπτωση όπου $\Lambda = \omega_0$ (κρίσιμη απόσβεση) το σύστημα επανέρχεται και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας στον ελάχιστο χρόνο.

Όταν $\Lambda \neq \omega_0$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Lambda < \omega_0$ (ασθενής απόσβεση).

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $\sqrt{\Lambda^2 - \omega_0^2} = i\omega$ όπου $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$ και λαμβάνοντας υπόψη την σχέση $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ αντικαθιστούμε στην γενική λύση και βρίσκουμε

$$\boxed{x = e^{-\Lambda t}\left(x_0\cos\omega t + \frac{\Lambda x_0 + v_0}{\omega}\sin\omega t\right)}$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ταλαντωτική συμπεριφορά με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$, και με μειούμενο πλάτος λόγω του παράγοντα $e^{-\Lambda t}$.

Παρατήρηση: Για $v_0 = 0$ και $\Lambda \ll \omega_0$ έχουμε με πολύ καλή προσέγγιση τη σχέση,

$$x = x_0 e^{-\Lambda t}\cos\omega t$$

η οποία συνήθως χρησιμοποιείται σ' αυτή την περίπτωση.

- $\Lambda > \omega_0$ (ισχυρή απόσβεση).

Στην περίπτωση αυτή έχουμε απεριοδική κίνηση και ο ταλαντωτής μετά την διέγερση επιστρέφει αργά στη θέση ισορροπίας του.

Σπύρος Χόρτης , Φυσικός
Λευκάδα