Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Σύντομη θεωρία

α) Με απόσβεση

Έστω ταλαντωτής μάζας m, σταθεράς επαναφοράς D, στον οποίο ασκείται δύναμη αντίστασης της μορφής $F_{αντ} = -bv$ και διεγείρουσα δύναμη $F_δ$. Η εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα οδηγεί στη διαφορική εξίσωση,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Dx = F_δ$$

ή θέτοντας $\frac{b}{2m} = \Lambda$ και $\frac{D}{m} = \omega_0^2$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_δ}{m}} \qquad (1)$$

Η (1) είναι γραμμική μη ομογενής Δ.Ε. δεύτερης τάξης.
Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$\boxed{x_{ομ} = e^{-\Lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right)} \quad \text{για } \Lambda \neq \omega_0$$

και

$$\boxed{x_{ομ} = \left(C_3 + C_4 t\right)e^{-\Lambda t}} \quad \text{για } \Lambda = \omega_0$$

Οι σταθερές προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Αρκεί να προσδιορίσουμε και μια μερική λύση της (1) ώστε να έχουμε τη γενική λύση της. Η μορφή της μερικής λύσης εξαρτάται από την μορφή της διεγείρουσας δύναμης. Στην περίπτωση όπου $F_δ = F_0\cos\omega t$ η μερική λύση θα είναι της μορφής, $x_μ = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.
Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε,

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{4\Lambda^2\omega^2 + \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{F_0}{m}\frac{2\Lambda\omega}{4\Lambda^2\omega^2 + \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$$

Άρα η γενική λύση της (1) μετά από αντικατάσταση και μερικές πράξεις είναι:

$$\boxed{x = \begin{cases} e^{-\Lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right) + \dfrac{F_0/m}{\sqrt{4\Lambda^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}\sin\left(\omega t + \arctan\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{2\Lambda\omega}\right) & \Lambda \neq \omega_0 \\ e^{-\Lambda t}\left(C_3 + C_4 t\right) + \dfrac{F_0/m}{\sqrt{4\Lambda^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}\sin\left(\omega t + \arctan\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{2\Lambda\omega}\right) & \Lambda = \omega_0 \end{cases}}$$

Έστω η περίπτωση $x(0) = 0$ και $v(0) = 0$, δηλαδή αρχικά το σώμα ηρεμεί στη θέση ισορροπίας του (η περίπτωση τυχαίων αρχικών συνθηκών οδηγεί σε πολύ πιο πολύπλοκη έκφραση χωρίς ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον).
Για τις σταθερές μετά από αρκετές πράξεις προκύπτει:

- Για $\Lambda \neq \omega_0$

$$\boxed{C_1 = \frac{F_0}{2m}\frac{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-\Lambda\left(\omega^2+\omega_0^2\right)}{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\left(4\Lambda^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)}} \quad \text{και} \quad \boxed{C_2 = \frac{F_0}{2m}\frac{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)+\Lambda\left(\omega^2+\omega_0^2\right)}{\sqrt{\Lambda^2-\omega_0^2}\left(4\Lambda^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)}}$$

- Για $\Lambda = \omega_0$

$$\boxed{C_3 = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2+\omega^2\right)^2}} \quad \text{και} \quad \boxed{C_4 = \frac{F_0\omega_0}{m}\frac{\omega_0^2-2\omega^2}{\left(\omega_0^2+\omega^2\right)^2}}$$

Παρατηρούμε ότι η γενική λύση προκύπτει ως άθροισμα δύο όρων. Ο πρώτος όρος λόγω του παράγοντα, $e^{-\Lambda t}$, φθίνει με την πάροδο του χρόνου. Μετά από χρονικό διάστημα το οποίο εξαρτάται από τη σταθερά Λ (μεταβατική περίοδος) ο όρος αυτός πρακτικά μηδενίζεται και απομένει ο δεύτερος όρος ο οποίος παριστάνει μια απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{4\Lambda^2\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}$ και συχνότητα ίση με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης (ω).

<u>β)Χωρίς απόσβεση</u>

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση η αρχική διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x = \frac{F_\delta}{m}}$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η,

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

και υποθέτουμε όπως προηγουμένως ότι, $F_\delta = F_0\cos\omega t$.

- Αν $\omega \neq \omega_0$.

Η μερική λύση θα είναι της μορφής,

$$x_\mu = A\cos\omega t$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $A = \dfrac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$ και τελικά

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos\omega t$$

Για αρχικές συνθήκες $x(0)=0$ και $v(0)=0$ προκύπτει,

$$\boxed{x = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right)}$$

*<u>Παρατήρηση:</u> Αν οι συχνότητες ω και ω_0 είναι παραπλήσιες, έχουμε περίπτωση **<u>διακροτημάτων</u>**.*

- Αν $\omega = \omega_0$ (συντονισμός).

Αναζητούμε μερική λύση της μορφής,

$$x_\mu = t\left(\mathrm{A}\cos\omega_0 t + \mathrm{B}\sin\omega_0 t\right)$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε,

$$\mathrm{A} = 0 \ \text{ και } \ \mathrm{B} = \frac{F_0}{2m\omega_0}$$

οπότε η γενική λύση θα είναι,

$$x = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin\omega_0 t$$

και με $x(0) = 0$ και $v(0) = 0$

$$\boxed{x = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin\omega_0 t}$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι η κίνηση είναι ταλάντωση με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος γεγονός που τελικά οδηγεί σε καταστροφή του συστήματος που ταλαντώνεται.

Σπύρος Χόρτης , Φυσικός
Λευκάδα