

Διάδοση θερμότητας σε μία διάσταση

Η θεωρητική μελέτη που ακολουθεί πραγματοποιήθηκε με αφορμή την [εργαστηριακή άσκηση](#) μέτρησης του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας του αλουμινίου, στην οποία διαγωνίστηκαν οι μαθητές στον τοπικό μαθητικό διαγωνισμό στα πλαίσια του EUSO 2017, που διοργανώθηκε από το ΕΚΦΕ Λευκάδας στις 10/12/2016.

Η διαταραχή της θερμικής ισορροπίας σε μια περιοχή ενός θερμοαγωγίμου υλικού οδηγεί σε μεταφορά θερμότητας από τις θερμότερες προς τις ψυχρότερες περιοχές του. Η μεταφορά ενέργειας λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας ορίζεται ως **θερμική αγωγιμότητα**.

Η ροή θερμότητας καθορίζεται από το **νόμο Fourier** που στις τρεις διαστάσεις γράφεται ως,

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T(\vec{r}, t)$$

ή σαν εξισώσεις συνιστωσών,

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

- q_i ($i = x, y, z$): η θερμότητα που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου και μονάδα επιφάνειας κάθετης στην i – διεύθυνση (μονάδα μέτρησης στο S.I., $W \cdot m^{-2}$).
- λ : ο **συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας** που εξαρτάται από τη φύση του υλικού και τη θερμοκρασία. Στην περίπτωση ομογενούς υλικού εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία (μονάδα μέτρησης στο S.I., $W \cdot m^{-1} K^{-1}$).

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση ομογενούς υλικού και για μικρή περιοχή θερμοκρασιών ώστε ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας να είναι πρακτικά σταθερός.

Από το νόμο Fourier σε συνδυασμό με την αρχή διατήρησης της ενέργειας μπορούμε να εξάγουμε την **εξίσωση διάχυσης θερμότητας**,

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

όπου ρ η πυκνότητα και c η ειδική θερμότητα του υλικού.

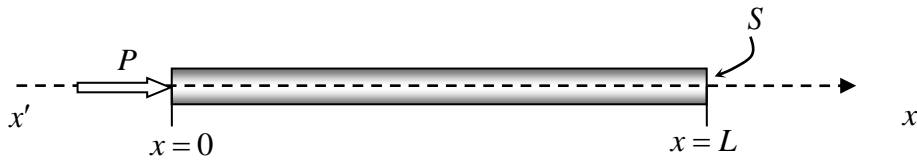
Θεωρώντας διάδοση θερμότητας μόνο στην x – διεύθυνση, η εξίσωση διάχυσης γίνεται,

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

όπου $a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

Η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (1) καθορίζεται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Έστω πλευρικά μονωμένη κυλινδρική ράβδος μήκους L και εμβαδού διατομής S στη διεύθυνση του άξονα $x'x$ με το ένα άκρο στη θέση $x=0$ και το άλλο στη θέση $x=L$. Αρχικά η ράβδος έχει



θερμοκρασία T_0 σε κάθε σημείο της. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να εισέρχεται στο αριστερό άκρο της ράβδου, θερμότητα με σταθερό ρυθμό, $P = qS$, ενώ το άλλο άκρο βρίσκεται συνεχώς σε θερμοκρασία T_0 , οι συνοριακές συνθήκες είναι,

$$T(x,0) = T(L,t) = T_0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{q}{\lambda} \quad (3)$$

Για μεγάλες τιμές του χρόνου η ράβδος άγει την εισερχόμενη θερμότητα χωρίς να την απορροφά και επομένως η θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ράβδου θα είναι χρονικά σταθερή. Έστω η μερική λύση $T_p(x)$ η οποία αντιπροσωπεύει την κατάσταση σταθερής θερμοκρασίας για μεγάλες τιμές του χρόνου και $T_c(x,t)$ η συμπληρωματική λύση ώστε η γενική λύση να είναι η,

$$T(x,t) = T_p(x) + T_c(x,t)$$

Οι (2) και (3) ικανοποιούνται θεωρώντας,

$$T_p(L) = T_0 \quad , \quad \left. \frac{\partial T_p(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{q}{\lambda} \quad (4)$$

$$T_c(L,t) = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial T_c(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

Οι T_p και T_c πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (1). Άρα,

$$\frac{\partial^2 T_p(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T_p(x)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_p(x)}{\partial x^2} = 0$$

με γενική λύση,

$$T_p(x) = C_1 x + C_2$$

όπου C_1, C_2 οι σταθερές ολοκλήρωσης.

Από τις (4) βρίσκουμε, $C_1 = -\frac{q}{\lambda}$ και $C_2 = \frac{qL}{\lambda} + T_0$, άρα,

$$T_p(x) = -\frac{q}{\lambda}x + \frac{qL}{\lambda} + T_0 \quad (6)$$

Για την συμπληρωματική λύση θα έχουμε,

$$\frac{\partial^2 T_c(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T_c(x,t)}{\partial t} \quad (7)$$

Η λύση της (7) γίνεται με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Έστω,

$$T_c(x,t) = F(x)G(t) \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας στην (7), έχουμε, (συμβολίζοντας με (\cdot) την χωρική και $(\dot{\cdot})$ την χρονική παράγωγο),

$$F''G = \frac{1}{a} F\dot{G} \Rightarrow \frac{F''}{F} = \frac{1}{a} \frac{\dot{G}}{G}$$

Το πρώτο μέλος της τελευταίας ισότητας εξαρτάται μόνο από τη θέση, ενώ το δεύτερο μόνο από το χρόνο και αφού θα πρέπει να ισχύει για κάθε x, t θα είναι αναγκαστικά,

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{a} \frac{\dot{G}}{G} = -k^2$$

όπου k η σταθερά χωρισμού μεταβλητών. Άρα θα πρέπει να λύσουμε τις συνήθεις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις,

$$\dot{G} + ak^2G = 0 \quad (9)$$

και

$$F'' + k^2F = 0 \quad (10)$$

Η λύσεις των (9) και (10) είναι,

$$G(t) = C_3 e^{-ak^2t}$$

και

$$F(x) = C_4 \sin(kx) + C_5 \cos(kx)$$

αντίστοιχα, όπου C_3, C_4, C_5 οι σταθερές ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας στην (8) έχουμε,

$$T_c(x,t) = e^{-ak^2t} (C_4 \sin(kx) + C_5 \cos(kx)) \quad (11)$$

όπου η σταθερά C_3 ενσωματώθηκε στις C_4 και C_5 .

Από τη δεύτερη των εξισώσεων (5) έχουμε,

$$\left. \frac{\partial T_c(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow e^{-ak^2 t} (C_4 k \cos(kx) - C_5 k \sin(kx)) \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

και από τη πρώτη των εξισώσεων (5),

$$T_c(L,t) = 0 \Rightarrow \cos(kL) = 0 \Rightarrow k = (2n+1) \frac{\pi}{2L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(οι αρνητικές τιμές του ακέραιου n δίνουν τις ίδιες λύσεις).

Άρα,

$$T_c(x,t) = C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{4L^2}} \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

με C_n σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν.

Η γενική λύση για την T_c θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των λύσεων που δίνονται από την τελευταία εξίσωση. Δηλαδή,

$$T_c(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{4L^2}} \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (12)$$

Από τις (6) και (12) προκύπτει η γενική λύση της $T(x,t)$.

$$T(x,t) = T_0 + \frac{q}{\lambda}(L-x) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{4L^2}} \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (13)$$

Το μόνο που απομένει είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών C_n . Από την (2), έχουμε,

$$T(x,0) = T_0 \Rightarrow T_0 + \frac{q}{\lambda}(L-x) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left((2n+1) \frac{\pi}{2L} x\right) = T_0$$

ή

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left((2n+1) \frac{\pi}{2L} x\right) = \frac{q}{\lambda}(x-L) \quad (14)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε στο σημείο αυτό την σχέση ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(mx') \cos(nx') dx' = \begin{cases} 1 & \text{για } m = n \\ 0 & \text{για } m \neq n \end{cases}$$

ή αντικαθιστώντας, $x' = \frac{\pi x}{2L}$,

$$\frac{1}{L} \int_0^{2L} \cos\left(m \frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(n \frac{\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} 1 & \text{για } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{για } m \neq n \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (14) με, τον παράγοντα, $\frac{1}{L} \cos(2m+1) \frac{\pi x}{2L}$, προκύπτει,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{L} \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left((2m+1) \frac{\pi x}{2L}\right) = \frac{q}{L\lambda} (x-L) \cos\left((2m+1) \frac{\pi x}{2L}\right)$$

και ολοκληρώνοντας,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{L} \int_0^{2L} \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left((2m+1) \frac{\pi x}{2L}\right) dx = \frac{q}{L\lambda} \int_0^{2L} (x-L) \cos\left((2m+1) \frac{\pi x}{2L}\right) dx$$

ή

$$C_n = \frac{q}{L\lambda} \int_0^{2L} (x-L) \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right) dx$$

αφού από το άθροισμα του πρώτου μέλους της προηγούμενης εξίσωσης "επιβιώνει" μόνο ο όρος για $m = n$.

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα βρίσκουμε για τους συντελεστές,

$$C_n = -\frac{8qL}{(2n+1)^2 \pi^2 \lambda}$$

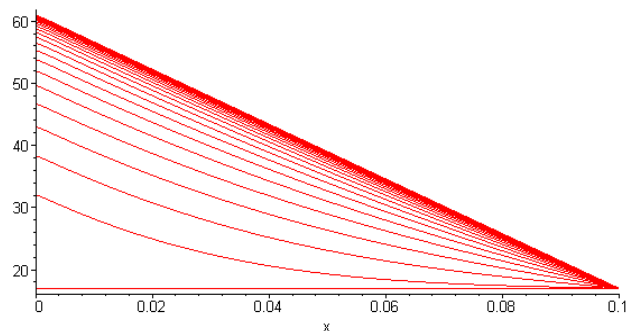
Η (13) λαμβάνοντας υπόψη την (14) γίνεται,

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{4L^2}} - 1 \right) \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right)$$

και αντικαθιστώντας τους συντελεστές C_n , έχουμε τη γενική λύση,

$$T(x,t) = T_0 + \frac{8qL}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(1 - e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \lambda t}{4L^2 \rho c}} \right) \cos\left((2n+1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (15)$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η εξάρτηση της θερμοκρασίας σαν συνάρτηση του x , για τις χρονικές στιγμές 0,10,20,...,250 s, όπως προκύπτει από την (15) για ράβδο αλουμινίου μήκους 10cm, διαμέτρου εγκάρσιας διατομής 12mm, αρχικής θερμοκρασίας 17°C και για εισερχόμενη ισχύ 10W. (Ο υπολογισμός έγινε λαμβάνοντας υπόψη τους 100 πρώτους όρους του αθροίσματος)



Εναλλακτικά μπορείτε να δείτε τη χρονική εξέλιξη στον σύνδεσμο,

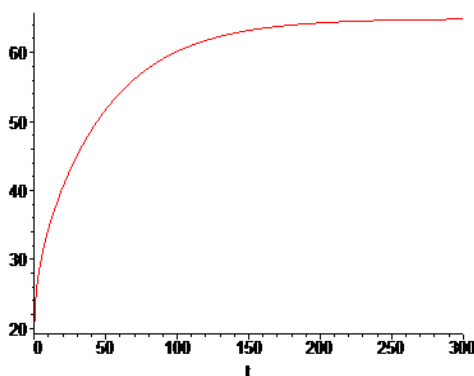
<https://ekfe.lef.sch.gr/wp-content/uploads/2022/01/ΧΡΟΝΙΚΗ-ΕΞΕΛΙΞΗ.gif>

Για τη χρονική εξέλιξη της θερμοκρασίας στο άκρο $x = 0$ της ράβδου η (15) δίνει,

$$T(0,t) = T_0 + \frac{8qL}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(1 - e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \lambda t}{4L^2 \rho c}} \right) \quad (16)$$

Η εξίσωση (16) δείχνει ότι η αύξηση της θερμοκρασίας είναι κατά προσέγγιση εκθετική (επόμενο διάγραμμα) με σταθερά χρόνου,

$$\tau_0 \sim \frac{\rho c L^2}{\lambda}$$



ενώ μετά την πάροδο αρκετού χρόνου η τελική θερμοκρασία θα είναι,

$$T(0, t \rightarrow \infty) = T_0 + \frac{8qL}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Αλλά, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ ¹, οπότε το αποτέλεσμα είναι, $T(0, t \rightarrow \infty) = T_0 + \frac{qL}{\lambda}$ που συμφωνεί με

την εξίσωση (6) όπως ήταν αναμενόμενο. Αν λάβουμε υπόψη ότι οι όροι του αθροίσματος της (16)

¹

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ όπως απέδειξε ο **Leonard Euler** το 1735 (https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem).

για $n = 1, 2, \dots$ σταθεροποιούνται πολύ νωρίτερα από τον πρώτο όρο ($n = 0$) (αφού οι συντελεστές του χρόνου στον εκθέτη είναι αντίστοιχα 9, 25, ... φορές μεγαλύτεροι κατ' απόλυτη τιμή) και ότι συνεισφέρουν στην συνολική αύξηση της θερμοκρασίας κατά, $\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \frac{qL}{\lambda}$, μπορούμε να υπολογίσουμε την θεωρητική τιμή της σταθεράς χρόνου με πολύ καλή προσέγγιση. Μετά από μερικές πράξεις προκύπτει τελικά,

$$\tau_0 = \frac{4}{\pi^2} \left(1 - \ln \frac{\pi^2}{8}\right) \frac{\rho c L^2}{\lambda} \cong 0,32 \frac{\rho c L^2}{\lambda}$$

Για τη ράβδο αλουμινίου που περιγράφεται παραπάνω, προκύπτει,

$$\tau_0 \cong 60s$$

Σπύρος Χόρτης - Φυσικός

Υπεύθυνος ΕΚΦΕ Λευκάδας

Βιβλιογραφία

1. Εργαστηριακοί οδηγοί, Τομέας Φυσικής ΣΕΜΦΕ,
http://www.physics.ntua.gr/gr/ergasthriakoi_odhgoi.htm
2. Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική - Alonso/Finn (μετ. Λ. Ρεσβάνη – Τ. Φίλιππα)
3. A heat transfer textbook - John H. Lienhard IV/John H. Lienhard V
4. Partial Differential Equations An Introduction – Walter A. Strauss