

Εξαναγκασμένη μηχανική ταλάντωση

Σπύρος Χόρτης, Φυσικός

Υπ. ΕΚΦΕ Λευκάδας - 2022

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται η μελέτη της εξαναγκασμένης μηχανικής ταλάντωσης στο σχολικό εργαστήριο, που έγινε με τη βοήθεια μιας πρωτότυπης διάταξης η οποία κατασκευάστηκε με απλά υλικά.

Στο βίντεο που συνοδεύει το άρθρο μπορείτε να δείτε την παρουσίαση της διάταξης σε λειτουργία καθώς και τέσσερα επιλεγμένα παραδείγματα. Δύο πειράματα με ταλαντωτή ενδιάμεσης απόσβεσης και δύο με ταλαντωτή αμελητέας απόσβεσης. Για κάθε έναν από τους ταλαντωτές το ένα πείραμα έγινε σε συχνότητα κοντά στη συχνότητα συντονισμού και το άλλο στο συντονισμό.

Δείτε το στη διεύθυνση <https://youtu.be/2zgheVpvCqY>

ή σαρώστε το QR code



Η διάταξη



Στην εικόνα φαίνεται η διάταξη συναρμολογημένη όπου διακρίνονται τα βασικά μέρη.

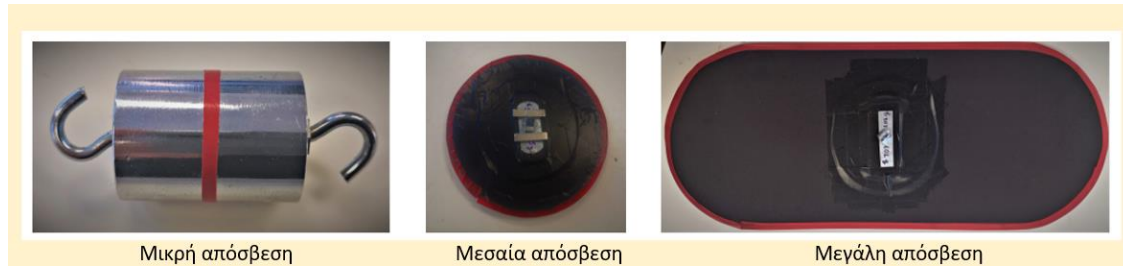
1. Ξύλινη βάση
2. Μοτέρ
3. Άξονας μετάδοσης
4. Βάση στήριξης μοτέρ – άξονα
5. Περιστρεφόμενος δίσκος
6. Έλασμα μετάδοσης
7. Γωνίες πλευρικής στήριξης
8. Ξύλινη βάση άξονα περιστροφής του ελάσματος
9. Αισθητήρας δύναμης συνδεδεμένος με το Multilog

Λεπτομέρειες της κατασκευής δείτε στο τέλος του άρθρου.

Ο ταλαντωτής

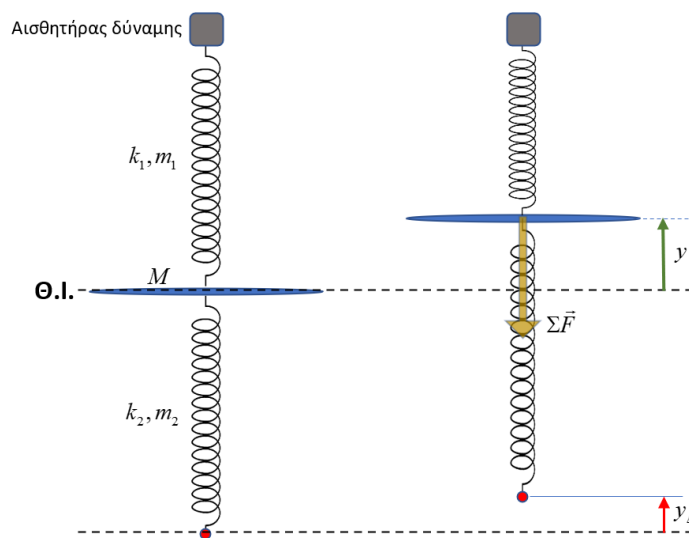
Αποτελείται από ένα κομμάτι από το έλασμα στο οποίο έχουν προσαρμοστεί υποδοχές αγκύρωσης των ελατηρίων. Στο έλασμα έχει προσαρμοστεί ελαφρύς δίσκος (από μακετόχαρτο) για αύξηση της σταθεράς απόσβεσης. Για μεγαλύτερη απόσβεση μπορεί να προστεθεί επιπλέον τμήμα μακετόχαρτου. Η μάζα του ταλαντωτή μπορεί να μεταβληθεί κολλώντας μικρούς μαγνήτες στο έλασμα και άλλα μεταλλικά ελάσματα.

Ως ταλαντωτής με αμελητέα απόσβεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα από τα βαράκια που υπάρχουν στα σετ των σχολικών εργαστηρίων της επιθυμητής μάζας. Στις πρώτες δοκιμές χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί ταλαντωτές με διαφορετικές σταθερές απόσβεσης που φαίνονται στη φωτογραφία.



Σύντομη θεωρητική ανάλυση

Το ταλαντευόμενο σύστημα φαίνεται σχηματικά στην παρακάτω εικόνα.



Το κάτω άκρο του ελατηρίου-2 συνδέεται με το διεγέρτη και εκτελεί αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους A_{Δ} και γωνιακής συχνότητας ω .

Για την τυχαία απομάκρυνση y του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας κατά την οποία η απομάκρυνση της ταλάντωσης του διεγέρτη (του άκρου του ελάσματος στο οποίο είναι δεμένο το κάτω άκρο του κάτω ελατηρίου) είναι y_{Δ} , ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται,

$$-k_1 y - k_2 (y - y_{\Delta}) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

όπου, $m = M + \frac{m_1 + m_2}{3}$ η ισοδύναμη μάζα του συστήματος ταλαντωτή ελατηρίων, και

θεωρώντας αντίσταση του αέρα ανάλογη της ταχύτητας.

Μετά από μερικές στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει,

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} y = \frac{k_2}{m} A_{\Delta} \sin(\omega t)$$

Θέτοντας, $\frac{b}{2m} = \Lambda$, $\frac{(k_1+k_2)}{m} = \omega_0^2$ και $k_2 A_\Delta = F_0$ η εξίσωση γράφεται σε πιο απλή μορφή,

$$\ddot{y} + 2\Lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

Η τελευταία Δ.Ε. είναι η εξίσωση του εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση και αρμονική διεγείρουσα δύναμη, και λύνεται σύμφωνα με τη βασική θεωρία. Η γενική λύση είναι:

$$y = e^{-\Lambda t} \left(C_1 e^{\sqrt{\Lambda^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda^2 - \omega_0^2} t} \right) + A \sin(\omega t + \theta) \text{ για } \Lambda \neq \omega_0$$

και

$$y(t) = e^{-\Lambda t} (C_3 + C_4 t) + A \sin(\omega t + \theta) \text{ για } \Lambda = \omega_0$$

όπου, $A = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\Lambda^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$ και $\theta = \arctan \frac{2\Lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$ ενώ οι σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4

προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Όπως φαίνεται από τη λύση η απομάκρυνση του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας του προκύπτει ως άθροισμα δύο όρων. Ο πρώτος όρος, λόγω του παράγοντα, $e^{-\Lambda t}$, μειώνεται εκθετικά και μπορεί να θεωρηθεί ότι πρακτικά μηδενίζεται μετά από χρόνο, $\tau = \frac{5}{\Lambda}$ (πέντε σταθερές χρόνου). Μετά από αυτή την μεταβατική περίοδο η απομάκρυνση πρακτικά δίνεται από τον δεύτερο όρο της λύσης (μερική λύση) που παριστάνει αμείωτη αρμονική κίνηση με συχνότητα ίση με τη συχνότητα ω του διεγέρτη και πλάτος A .

Για $\Lambda < \omega_0$ και αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, προκύπτει ύστερα από αρκετές πράξεις,

$$y = A \left(\frac{\omega}{\omega_{ελ}} e^{-\Lambda t} \sin(\omega_{ελ} t + \varphi) + \sin(\omega t + \theta) \right)$$

όπου, $\omega_{ελ} = \sqrt{\omega_0^2 - \Lambda^2}$ η συχνότητα της ελεύθερης (φθίνουσας) ταλάντωσης και

$$\varphi = \arctan \left(\frac{2\Lambda\omega_{ελ}}{2\Lambda^2 - \omega_0^2 + \omega^2} \right)$$

Όταν η απόσβεση είναι αρκετά μικρή και η συχνότητα του διεγέρτη είναι παραπλήσια της συχνότητας της ελεύθερης ταλάντωσης του ταλαντωτή η κίνηση παρουσιάζει **διακροτήματα**

στην αρχή της κίνησης, αφού η κίνηση προκύπτει ως επαλληλία δύο αρμονικών ταλαντώσεων περίπου ίδιου πλάτους (στην αρχή της κίνησης) και παραπλήσιων συχνοτήτων. **Η συχνότητα της κίνησης θα είναι ίση με το ημίθροισμα των συχνοτήτων της ελεύθερης ταλάντωσης και της συχνότητας του διεγέρτη** όπως προβλέπεται από τη θεωρία και όπως πειραματικά επιβεβαιώνεται στο συνοδευτικό βίντεο (παράδειγμα Α). Μετά την πάροδο αρκετού χρόνου ο πρώτος όρος μηδενίζεται και η κίνηση γίνεται αρμονική σταθερού πλάτους και συχνότητας ίσης με του διεγέρτη.

Στην περίπτωση πολύ μικρής απόσβεσης ($\Lambda \ll \omega_0$), η μεταβατική περίοδος είναι πολύ μεγαλύτερη και σε περίπτωση συντονισμού **το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται συνεχώς μέχρι την καταστροφή του συστήματος** (παράδειγμα Δ στο συνοδευτικό βίντεο).

Πραγματοποίηση των πειραμάτων.

Χαρακτηριστικά των ελατηρίων που χρησιμοποιήθηκαν:

$$k_1 = 49 \text{ N/m}, m_1 = 25 \text{ g}, k_2 = 36 \text{ N/m}, m_2 = 26,5 \text{ g}$$

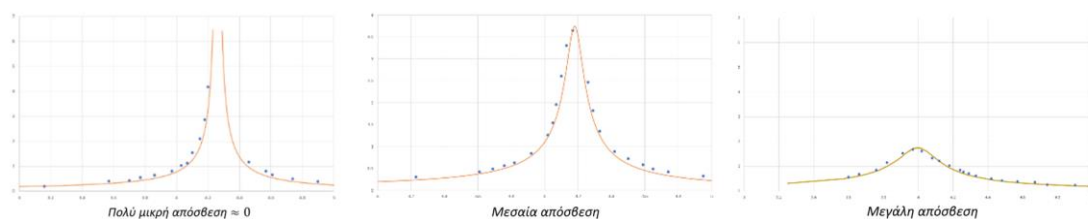
Η μάζα των ταλαντωτών που χρησιμοποιήθηκαν ήταν $M = 101 \text{ g}$.

Η ιδιοσυχνότητα της ελεύθερης αμείωτης ταλάντωσης που προκύπτει θεωρητικά είναι:

$$\omega_0 = 26,82 \text{ r/s}, \text{ ή } f_0 = 4,27 \text{ Hz}$$

Πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο πολλά πειράματα για ταλαντωτές με διαφορετική σταθερά απόσβεσης για διάφορες συχνότητες με τη διαδικασία που φαίνεται στο βίντεο.

Μετρήθηκαν τα αντίστοιχα πλάτη και αποτυπώθηκαν οι μετρήσεις σε διάγραμμα πλάτους συχνότητας στο οποίο σχεδιάστηκε και η καμπύλη συντονισμού που προκύπτει θεωρητικά, όπως φαίνεται στις εικόνες.

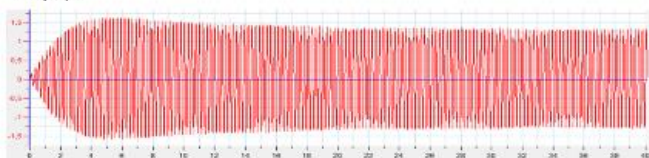


Πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής της γνωστής θεωρίας αφού η δύναμη αντίστασης κυρίως για τη μεσαία και μεγάλη απόσβεση σίγουρα δεν είναι ανάλογη της ταχύτητας. Ωστόσο εισάγοντας στο μοντέλο παραμέτρους απόσβεσης που μετρούνται από το πείραμα παρατηρούμε πολύ καλή συσχέτιση των αποτελεσμάτων, θεωρώντας κάθε φορά ως ω_0 τη συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης.

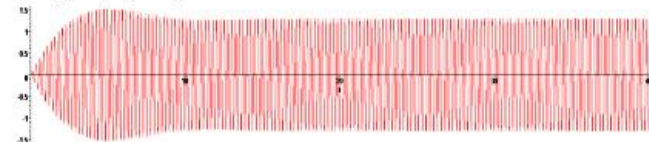
Για κάποια άλλα πειράματα έγινε σύγκριση με την θεωρητική πρόβλεψη που προέκυψε από τη λύση της Δ.Ε. και την δημιουργία του αντίστοιχου διαγράμματος από το πρόγραμμα *Marple*, όπως φαίνεται στις επόμενες εικόνες. Η συμφωνία των αποτελεσμάτων είναι απόλυτα ικανοποιητική. Εισήχθη η κατάλληλη σταθερά για την μετατροπή της απομάκρυνσης που υπολογίζεται θεωρητικά από το πρόγραμμα στην αντίστοιχη δύναμη την οποία μετρά ο αισθητήρας.

$$f= 4,1 \text{ Hz} - \Lambda=0.3 \text{ s}^{-1}$$

Πείραμα

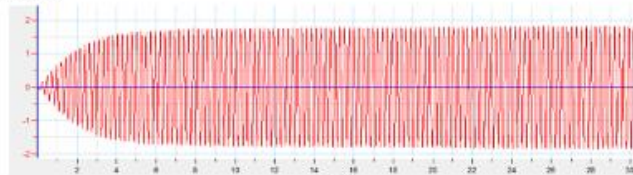


Θεωρητική καμπύλη

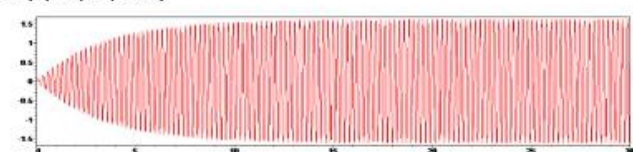


$$f= 4,17 \text{ Hz} - \Lambda=0.3 \text{ s}^{-1} \text{ (Συντονισμός πλάτους)}$$

Πείραμα

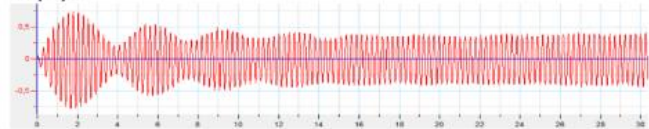


Θεωρητική καμπύλη

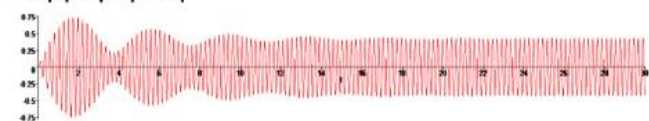


$$f= 4,44 \text{ Hz} - \Lambda=0.2 \text{ s}^{-1}$$

Πείραμα

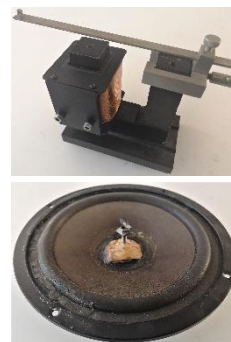


Θεωρητική καμπύλη



Παρατηρήσεις:

Το συγκεκριμένο πείραμα μπορεί να πραγματοποιηθεί με διεγέρτη διάταξη που ταλαντώνεται με ηλεκτρομαγνητική διέγερση. Ένα τέτοιο έλασμα που προσαρμόζεται σε διάταξη πηνίου με σιδηροπυρήνα διαθέτουν πολλά σχολικά εργαστήρια. Αντίστοιχο ρόλο μπορεί να παίξει ένα παλιό ηχείο που τροφοδοτείται με αρμονική τάση επιθυμητής συχνότητας από γεννήτρια συχνοτήτων.



Η χρήση αυτών των μεθόδων είναι σαφώς πιο εύκολη για ποιοτική μελέτη του φαινομένου αλλά έχει τα εξής μειονεκτήματα.

- Το πλάτος διέγερσης δεν διατηρείται σταθερό κατά τη μεταβολή της συχνότητας. Όταν η συχνότητα αυξάνεται το πλάτος διέγερσης ελαττώνεται.
- Αλληλεπίδραση του διεγέρτη με τον ταλαντωτή μπορεί αν είναι ισχυρή και η δύναμη αλληλεπίδρασης να μεταβάλλει τα χαρακτηριστικά της κίνησης του διεγέρτη.

Η παραπάνω κατασκευή δεν έχει τα μειονεκτήματα αυτά αφού,

- Το πλάτος διέγερσης καθορίζεται (διαβαθμισμένα) με απόλυτη ακρίβεια από τις επιλογές του χρήστη στο μηχανισμό μετάδοσης της κίνησης.
- Το ισχυρό μοτέρ σε συνδυασμό με το μηχανισμό μείωσης των στροφών μέσω γραναζιών επιτρέπει την περιστροφή του με μεγάλη ταχύτητα αποδίδοντας μεγάλη ισχύ, ενώ η ροπή στρέψης στον άξονα είναι μεγάλη. Η ύπαρξη δε του ελάσματος μετάδοσης, που λειτουργεί ως μοχλός, επιτρέπει την άσκηση πολύ μεγάλης δύναμης στο σύστημα του ταλαντωτή, χωρίς ουσιαστικά να επηρεάζεται η λειτουργία του μοτέρ.

Έχει όμως άλλα...

- Το εύρος συχνοτήτων είναι σχετικά μικρό (1-15Hz) εκτός αν προστεθεί επιπλέον μηχανισμός αύξησης των στροφών.
- Η κατασκευή είναι χρονοβόρα και σχετικά δύσκολη.

Λεπτομέρειες της κατασκευής

Για την κατασκευή χρησιμοποιήθηκαν:

- Δύο ξύλινοι ράβδοι ορθογώνιας διατομής διαστάσεων, 3cmX5cmX80cm
- Ένα ορθογώνιο κομμάτι κόντρα πλακέ διαστάσεων 30cmX100cm πάχους 12mm.
- Ένα μοτεράκι από παλιό εκτυπωτή μαζί με τον άξονα περιστροφής και το σύστημα μείωσης των στροφών.
- Μερικά ακόμα μικρά κομμάτια ξύλου και κόντρα πλακέ για τη στήριξη του μηχανισμού του μοτέρ.
- Ένα κομμάτι γαλβανισμένη λαμαρίνα πάχους 1mm, πλάτους 3,5cm και μήκους 50cm περίπου.
- Ένα κομμάτι ατσάλινης κυλινδρικής ράβδου μήκους 50cm περίπου και διαμέτρου διατομής 8mm.
- Ένας μεταλλικός δίσκος διαμέτρου 7 cm και πάχους 5mm
- Σετ τρυπανιών για μέταλλο και ξύλο
- Διάφορες βίδες.
- Σετ κολαούζων και φιλιερών για την κατασκευή σπειρωμάτων.
- Βασικά εργαλεία
- Δύο ελατήρια από το σετ ελατηρίων που διαθέτει το σχολικό εργαστήριο

Κατασκευή της ξύλινης βάσης.

Κοντά στη μία στενή πλευρά του κόντρα πλακέ στερεώθηκαν κάθετα οι δύο ξύλινες ράβδοι σε απόσταση 24 cm . Στο πάνω μέρος τους ενώθηκαν με μικρή ξύλινη ράβδο. Σε τρία διαφορετικά ύψη δημιουργήθηκαν τρύπες διαμέτρου 8 mm στις δύο κατακόρυφες ράβδους από τις οποίες περνά μεταλλική ατσάλινη ράβδος στην οποία στηρίζεται ο αισθητήρας δύναμης στον οποίο αναρτάται η πάνω άκρη του ενός από τα δύο ελατήρια, όπως φαίνεται στη φωτογραφία.

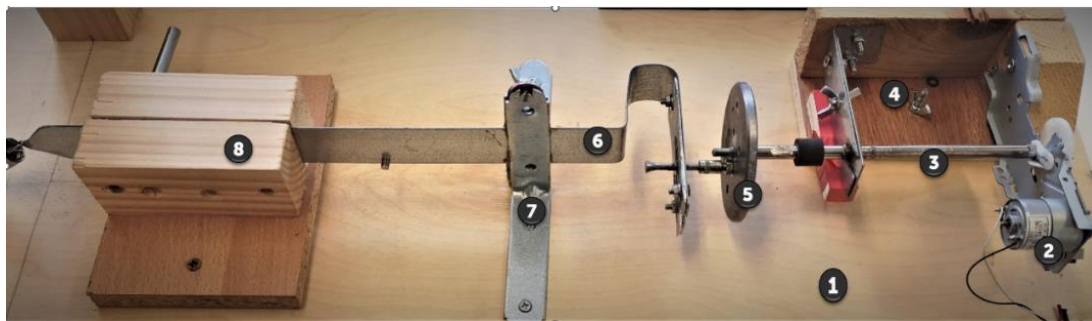


Στήριξη και προσαρμογή του μοτέρ.

Ο άξονας του μοτέρ **(3)** που χρησιμοποιήθηκε διαμέτρου διατομής 8mm κόπηκε σε μήκος περίπου 20cm, και στο άκρο του κατασκευάστηκε σπείρωμα σε μήκος περίπου 1cm.



Στη συνέχεια κατασκευάστηκε από μικρά, κατάλληλα διαμορφωμένα, κομμάτια ξύλου η βάση **(4)** στη οποία στηρίχτηκε το μοτέρ μαζί με τον άξονά του. Για τη στήριξη του άξονα χρησιμοποιήθηκαν δύο ελάσματα από τη γαλβανισμένη λαμαρίνα στα οποία έγιναν τρύπες διαμέτρου 8mm και στη συνέχεια κόπηκαν κατάλληλα. Το ένα από τα δύο στηρίχτηκε στην ξύλινη βάση, τοποθετήθηκε ο άξονας στην εσοχή και στη συνέχεια τοποθετήθηκε το δεύτερο έλασμα, το οποίο στηρίχτηκε στο πρώτο με δύο βίδες, και "αγκάλιασε" τον άξονα αφήνοντάς τον να περιστρέφεται ελεύθερα αλλά χωρίς να αφήνει σημαντικό κενό (εναλλακτικά θα μπορούσε να προσαρμοστεί κατάλληλο στήριγμα με ρουλεμάν, αλλά προτιμήθηκε αυτή η πιο απλή λύση).



Μετάδοση της κίνησης

Στο κέντρο του μεταλλικού δίσκου **(5)** κατασκευάστηκε μια τρύπα 7mm στο εσωτερικό της οποίας δημιουργήθηκε σπείρωμα 8mm. Έτσι ο δίσκος μπορεί να βιδωθεί στον άξονα του μοτέρ με το επίπεδό του κάθετο στον άξονα. Επίσης στον δίσκο έγιναν μερικές τρύπες



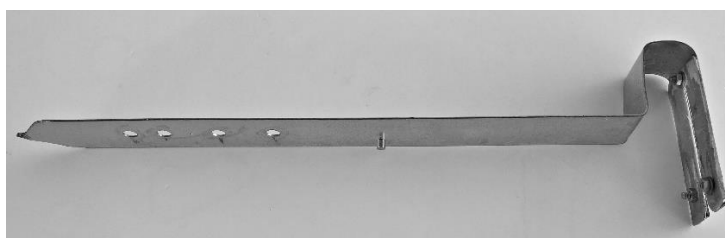
διαμέτρου 4mm σε διαφορετικές αποστάσεις από το κέντρο του (ξεκινώντας από περίπου 1cm και μέχρι περίπου 3cm) και σπειρώματα στο εσωτερικό τους με κολαούζο των 5mm.

Ένα κομμάτι του άξονα του μοτέρ που αφαιρέθηκε μήκους περίπου 5cm, διαμορφώθηκε ως εξής: Στο ένα άκρο του και σε μήκος 1cm περίπου η διάμετρος μειώθηκε στα 5mm και δημιουργήθηκε σπείρωμα. Στο άλλο άκρο του η διάμετρος μειώθηκε στα 4mm και το μήκος σε 3cm περίπου (στη βελτιωμένη εκδοχή η διαμόρφωση αυτή έγινε σε τόρνο).



Το στέλεχος που δημιουργήθηκε μπορεί να βιδώνεται σε κάποια από τις τρύπες του δίσκου έτσι ώστε κατά την περιστροφή του δίσκου να κινείται κυκλικά, παράλληλα με τον άξονά του με ακτίνα τροχιάς ίση με την απόσταση της τρύπας που επιλέχθηκε, από το κέντρο του δίσκου

Για την μετατροπή της περιστροφικής κίνησης σε παλινδρομική το έλασμα γαλβανισμένης



λαμαρίνας διαμορφώθηκε όπως φαίνεται στην εικόνα. Στη σχισμή τοποθετείται το ελεύθερο άκρο του στελέχους το οποίο μπορεί να γλιστρά με τη βοήθεια λιπαντικού καθώς περιστρέφεται μετατρέποντας την περιστροφική κίνηση σε παλινδρομική με πλάτος όσο η ακτίνα περιστροφής του στελέχους.

Το έλασμα μετάδοσης της κίνησης μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από μια από τέσσερις τρύπες που έχουν γίνει στο έλασμα. Η επιλογή γίνεται ανάλογα με το επιθυμητό πλάτος διέγερσης του ταλαντωτή. Ο άξονας στηρίζεται σε δύο κομμάτια ξύλου **(8)** στα οποία έχουν δημιουργηθεί τρύπες στις αντίστοιχες θέσεις με αυτές του ελάσματος. Το κενό ανάμεσα στα κομμάτια ξύλου είναι ελάχιστα μεγαλύτερο από το πάχος του ελάσματος ώστε αυτό να μπορεί να κινείται ελεύθερα αλλά και να διατηρείται το επίπεδό του κατακόρυφο. Για την πλευρική στήριξη του ελάσματος χρειάστηκε επίσης η τοποθέτηση σε κατάλληλη θέση δύο μεταλλικών γωνιών **(7)** με διάκενο μεταξύ τους ίδιο με αυτό των δύο ξύλων.



Το άλλο άκρο του ελάσματος έχει κοπεί κατάλληλα καταλήγοντας σε μια μυτερή άκρη στην οποία έχει ανοιχτεί μια μικρή τρύπα από την οποία περνά το άκρο του ενός από τα δύο ελατήρια. Το άκρο αυτό κατά την περιστροφή του δίσκου κινείται εκτελώντας, με πολύ καλή προσέγγιση, κατακόρυφη αρμονική κίνηση, με πλάτος που μπορεί να μεταβάλλεται με

συνδυασμό της θέσης του άξονα περιστροφής και της τρύπας του δίσκου που βιδώνεται το στέλεχος που μεταδίδει την κίνηση στο έλασμα.

Η συχνότητα της περιστροφής του δίσκου και επομένως και η συχνότητα διέγερσης μπορεί να μεταβάλλεται προσαρμόζοντας κατάλληλα την τάση τροφοδοσίας του μοτέρ. Μπορεί να κυμαίνεται από περίπου 1Hz έως 15 Hz.

Λευκάδα 2022

Σπύρος Χόρτης