

Φθίνουσα ταλάντωση

Δύναμη απόσβεσης - Επίδραση της πίεσης του αέρα

Σπύρος Χόρτης – Φυσικός, Υπ. ΕΚΦΕ Λευκάδας

Στο άρθρο περιγράφεται η πειραματική μελέτη της φθίνουσας ταλάντωσης ενός συστήματος ελατηρίου – μάζας και χωρίζεται σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος με τη χρήση του προγράμματος [Tracker](#) διερευνάται η εξάρτηση της δύναμης απόσβεσης από την ταχύτητα, για την ταλάντωση σφαίρας και για την ταλάντωση κυκλικού δίσκου. Υπολογίζεται επίσης πειραματικά ο συντελεστής απόσβεσης σε κάθε περίπτωση.

Στο δεύτερο μέρος περιγράφεται η πειραματική διερεύνηση της επίδρασης της πίεσης του αέρα στον συντελεστή απόσβεσης, στην περίπτωση της ταλάντωσης της σφαίρας. Από την μελέτη αυτή προκύπτει και αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλος της μη ιδανικότητας του ελατηρίου στην φθίνουσα ταλάντωση ελατηρίου μάζας. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο του ΕΚΦΕ Λευκάδας, και συνοδεύεται από επεξηγηματικό σχετικό βίντεο.

A. Πειραματικός έλεγχος της εξάρτησης της δύναμης απόσβεσης από την ταχύτητα του ταλαντωτή.

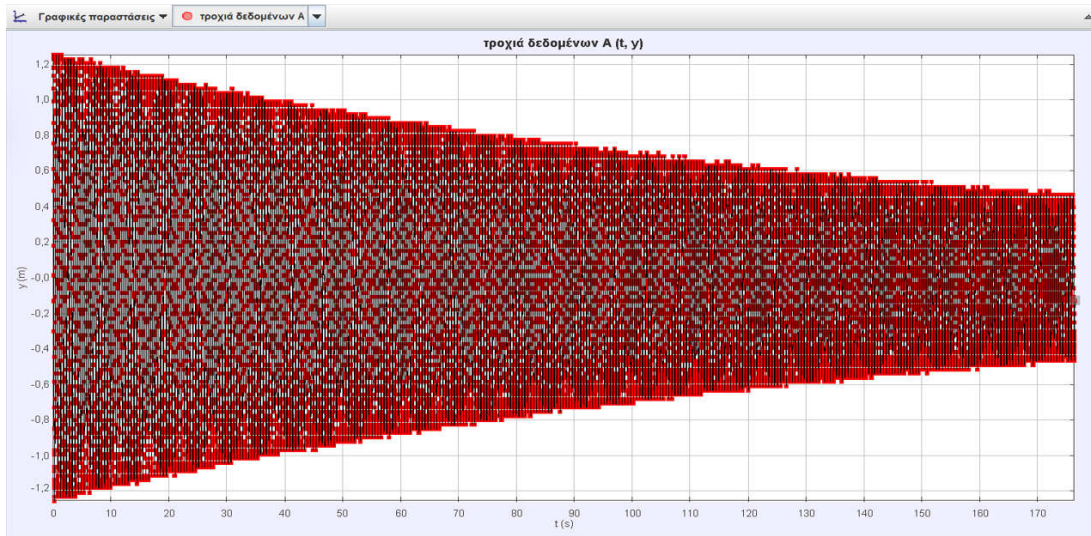
1. Φθίνουσα ταλάντωση σφαίρας

Ο ταλαντωτής

Χρησιμοποιήθηκε ένα τμήμα του ελατηρίου, από το σετ των ελατηρίων που διαθέτουν τα σχολικά εργαστήρια, σταθεράς $2\frac{N}{m}$, και μια πλαστική σφαίρα στην οποία προστέθηκαν μικρά καρφιά, ώστε η συνολική μάζα να ισούται με $70g$. Χρησιμοποιήθηκαν 30 από τις 166 σπείρες του ελατηρίου οπότε η σταθερά επαναφοράς ήταν, $11\frac{N}{m}$ και η περίοδος της ταλάντωσης $0,5s$ περίπου. Για τον έλεγχο της εξάρτησης της δύναμης απόσβεσης από την ταχύτητα της σφαίρας πραγματοποιήθηκε η εξής διαδικασία.



Ο ταλαντωτής αναρτήθηκε από τον αισθητήρα δύναμης του multilog και τέθηκε σε ταλάντωση σε κανονική ατμοσφαιρική πίεση. Λήφθηκαν μετρήσεις δύναμης χρόνου με ρυθμό δειγματοληψίας 100 μετρήσεις/s. Οι μετρήσεις της δύναμης F σχετίζονται με την απομάκρυνση y από τη Θ.Ι. του ταλαντωτή με μια σχέση της μορφής, $F = F_0 + ky$. Αφού εστάχθηκαν στο excel προσδιορίστηκε και αφαιρέθηκε η σταθερά F_0 και προέκυψαν οι τιμές που είναι ανάλογες της απομάκρυνσης σαν συνάρτηση του χρόνου. Οι προσαρμοσμένες μετρήσεις μεταφέρθηκαν στη συνέχεια σε αρχείο κειμένου και εισήχθησαν σε καρτέλα του προγράμματος Tracker με την επιλογή, **Τροχιά → Νέο → Τροχιά δεδομένων** και εισαγωγή από το αρχείο κειμένου (ή εναλλακτικά με "σύρσιμο" του αρχείου κειμένου στην περιοχή εισαγωγής του βίντεο του προγράμματος). Στην εικόνα 1, φαίνεται η μέτρηση της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο.

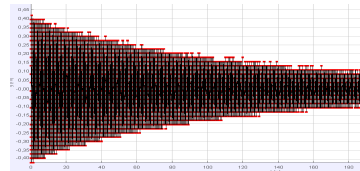


Εικόνα 1

Παρατήρηση 1: οι τιμές στον άξονα y δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα αφού είναι μετρήσεις δύναμης και όχι απομάκρυνσης, αλλά αυτό δεν επηρεάζει τα συμπεράσματά μας αφού πρόκειται απλώς για μια γραμμική αλλαγή κλίμακας.

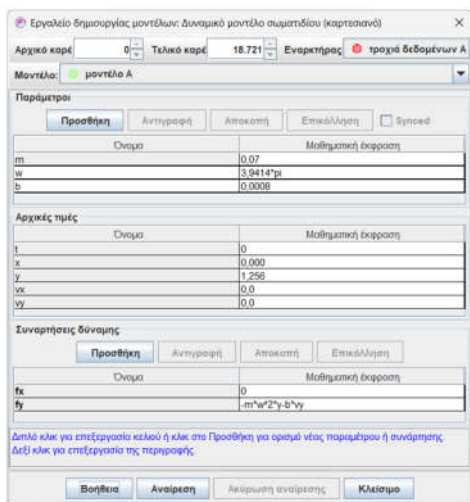
Παρατήρηση 2: Επειδή η απόσβεση είναι πολύ μικρή, η διαφορά των διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων είναι επίσης πολύ μικρή και αρκετά μικρότερη από την διακριτική ικανότητα του αισθητήρα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η μείωση του πλάτους να μην φαίνεται στις μετρήσεις βαθμιαία αλλά κλιμακωτή όπως φαίνεται στην διπλανή εικόνα.

Το αποτέλεσμα βελτιώθηκε αυξάνοντας αναλογικά τις καταγραφόμενες τιμές κατά έναν παράγοντα περίπου ίσο με 3, με μια διάταξη μοχλού όπως φαίνεται στη φωτογραφία.

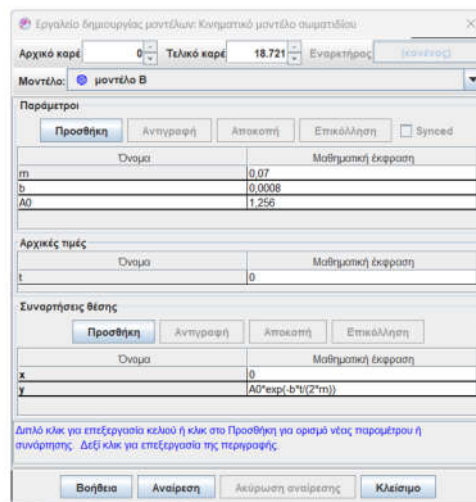


Δημιουργία μοντέλων προσέγγισης των πειραματικών δεδομένων

Δημιουργήθηκε αρχικά ένα δυναμικό μοντέλο σωματιδίου όπως φαίνεται στην εικόνα 2 όπου εισήχθη εκτός από τη δύναμη επαναφοράς, δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας.



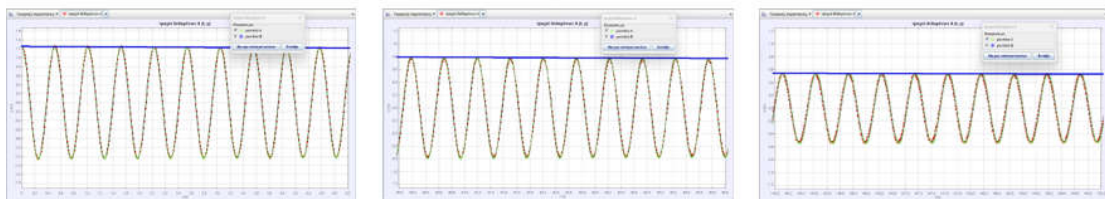
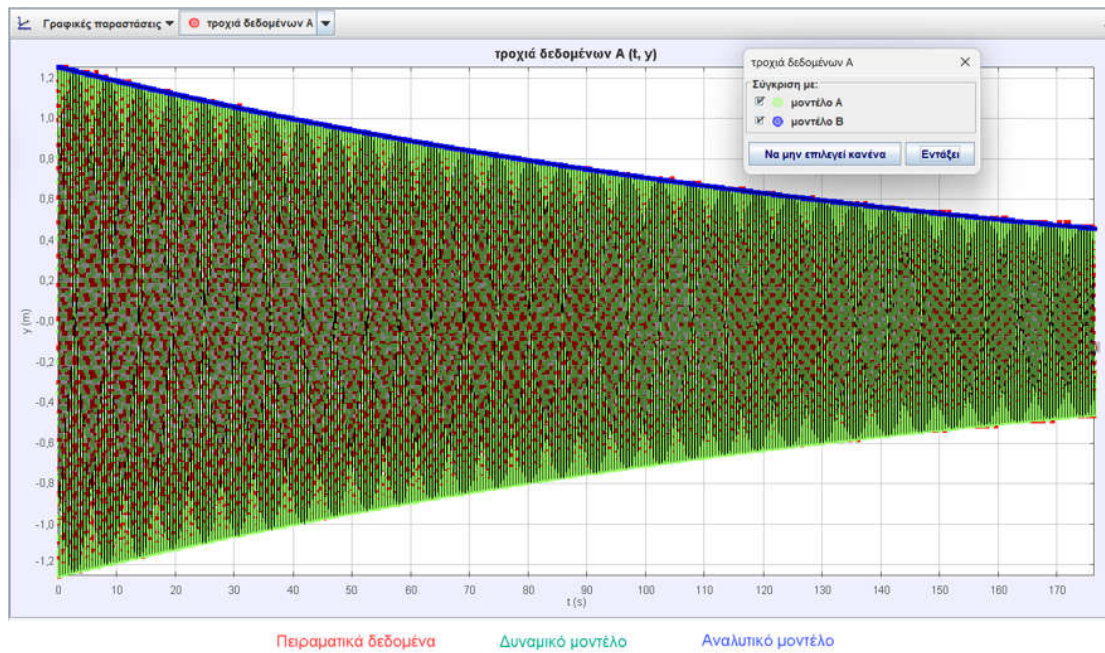
Εικόνα 2



Εικόνα 3

Εισάγοντας διάφορες τιμές στην γωνιακή συχνότητα και στην παράμετρο b (συντελεστής απόσβεσης) βρίσκουμε πολύ καλή ταύτιση του μοντέλου με τις πειραματικές μετρήσεις για την τιμή $b = 8 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Επικουρικά και για πιο ασφαλή συμπεράσματα δημιουργήθηκε και ένα κινηματικό μοντέλο σωματιδίου (εικόνα 3) για την απεικόνιση της μεταβολής του πλάτους της ταλάντωσης σαν συνάρτηση του χρόνου, θεωρώντας την εκθετικά μειούμενη όπως αναμένεται. Η σχηματιζόμενη τροχιά, εισάγοντας ως συντελεστή απόσβεσης την τιμή που προσδιορίσαμε κατά την προσέγγιση του δυναμικού μοντέλου παρατηρούμε ότι ταιριάζει με εξαιρετική ακρίβεια στην μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης. Στις εικόνες που ακολουθούν φαίνονται σε κοινό διάγραμμα τα πειραματικά δεδομένα (κόκκινο χρώμα), τα δεδομένα με βάση το δυναμικό μοντέλο (πράσινο χρώμα) και το κινηματικό μοντέλο (μπλε χρώμα) για όλη τη διάρκεια της κίνησης (0-180 s) αλλά και για τρία μικρότερα χρονικά διαστήματα (0-5 s, 80-85 s, 145-150 s) για καλύτερη ευκρίνεια.



Εικόνα 4

Μετά τις παραπάνω διαπιστώσεις είναι φανερό ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στην ταλάντωση του συγκεκριμένου ταλαντωτή ισχύουν με πολύ καλή προσέγγιση όλα όσα προβλέπονται από την θεωρητική μελέτη για δύναμη αντίστασης της μορφής, $\vec{F}_{αντ} = -b\vec{v}$.

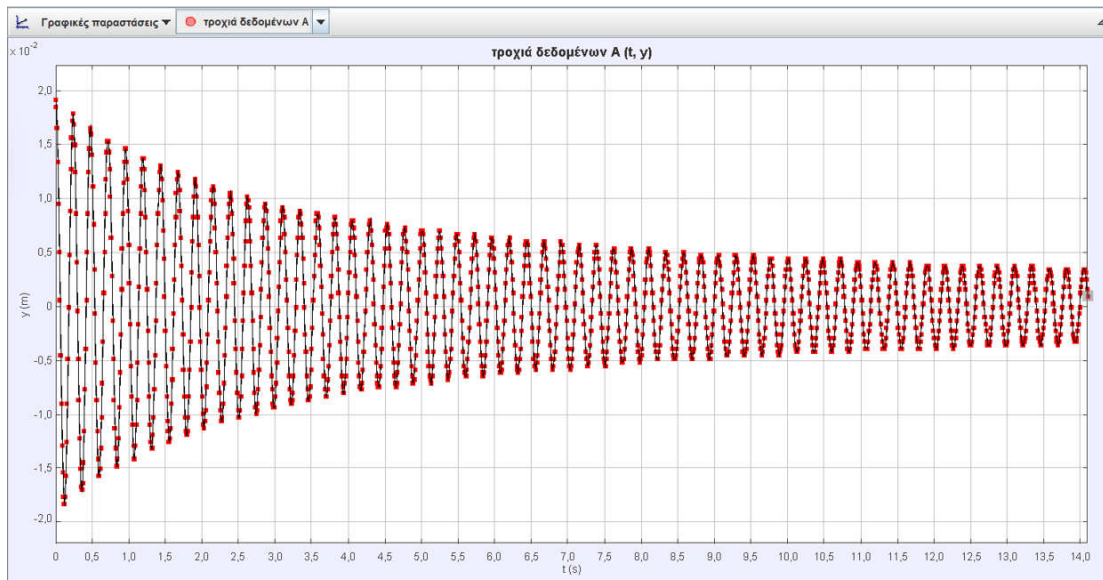
2. Φθίνουσα ταλάντωση δίσκου

Ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής, $\vec{F}_{avt} = -b|\vec{v}|\vec{v}$, $b > 0$

Στην περίπτωση αυτή μελετούμε την φθίνουσα ταλάντωση ενός κυκλικού δίσκου. Ένα παράδειγμα αυτού του τύπου είναι η απόσβεση κατά την ταλάντωση κυκλικού δίσκου που ακολουθεί μετά το σταμάτημα του διεγέρτη στο δεύτερο επιλεγμένο πείραμα που παρουσιάζεται στο σχετικό άρθρο και στο συνοδευτικό βίντεο του ΕΚΦΕ Λευκάδας το οποίο μπορείτε να δείτε στο σύνδεσμο, <https://ekfe.lef.sch.gr/forced-oscillation/> ή σαρώνοντας το QR code της διπλανής εικόνας.



Εξάγουμε τις μετρήσεις του αισθητήρα δύναμης σε αρχείο excel και στη συνέχεια τις μετατρέπουμε σε απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας διαιρώντας με τη σταθερά επαναφοράς και προσθέτοντας την κατάλληλη σταθερά. Αντιγράφουμε τις προσαρμοσμένες τιμές σε αρχείο κειμένου και τις εισάγουμε σε καρτέλα του προγράμματος tracker (όπως περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα). Προκύπτει έτσι η γραφική παράσταση που φαίνεται στην εικόνα 5.



Εικόνα 5

Εισάγουμε και πάλι δυναμικό μοντέλο (εικόνα 6) με δύναμη αυτή τη φορά της μορφής, $\sum F = -m\omega^2 y - b|v|v$ όπου, $m = 0,101\text{kg}$, $\omega = 26,37\text{s}^{-1}$, $b = 0,15\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$, στο οποίο το μέτρο

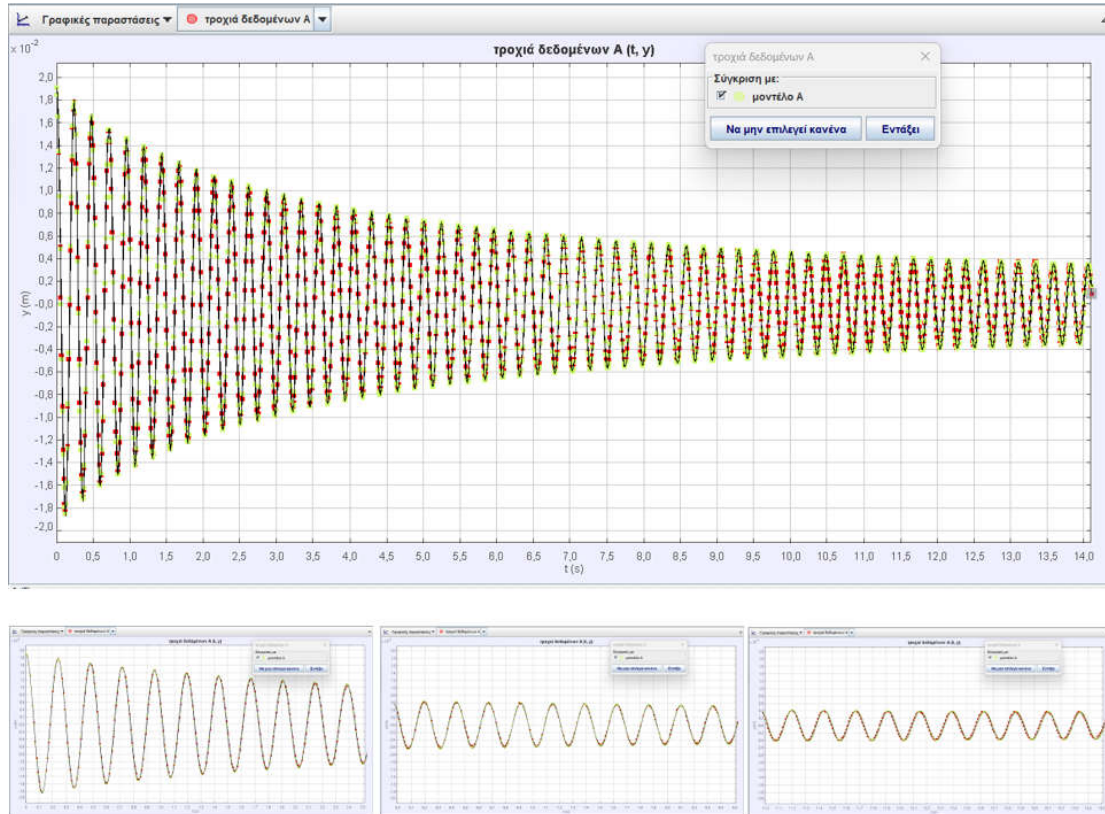
Όνομα	Μαθηματική έκφραση
m	0.101
ω	26.37
b	0.15

Όνομα	Μαθηματική έκφραση
t	0
x	0.000
y	1.912e-2
vx	0.0
vy	0.0

Όνομα	Μαθηματική έκφραση
fx	0
fy	-m*ω^2*y-b*vy*abs(vy)

Εικόνα 6

της δύναμης αντίστασης είναι ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας. Όπως μπορείτε να δείτε στην εικόνα 7, βρίσκουμε εξαιρετική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων. Στα διαγράμματα φαίνονται τα πειραματικά δεδομένα (κόκκινο χρώμα) σε σύγκριση με το μοντέλο (πράσινο χρώμα) που περιγράφεται παραπάνω, για όλη την κίνηση καθώς και για τρία μικρότερα χρονικά διαστήματα για λεπτομερέστερη σύγκριση.



Εικόνα 7

Το συμπέρασμα είναι ότι σε αυτή την περίπτωση η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας με πολύ καλή προσέγγιση.

Παρατήρηση: Και στις δύο περιπτώσεις το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης είναι μεταξύ, 2-4 cm περίπου. Σε δοκιμές που έγιναν στην περίπτωση της σφαίρας με μεγαλύτερο αρχικό πλάτος ταλάντωσης, το μοντέλο για την εξάρτηση της δύναμης αντίστασης από την ταχύτητα, που ταίριαζε με πολύ καλή ακρίβεια στα πειραματικά δεδομένα ήταν της μορφής, $\vec{F}_{αντ} = -b\vec{v} - c\vec{v}|\vec{v}|$ με κατάλληλη επιλογή των θετικών σταθερών b και c . Με την αύξηση του πλάτους αυξάνεται και η σταθερά c , του δευτεροβάθμιου όρου ενώ μικραίνει η σταθερά b και η απόσβεση τείνει να γίνει σε μεγάλες ταχύτητες ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Η κρίσιμη παράμετρος που καθορίζει την έκφραση της δύναμης αντίστασης είναι, όπως είναι γνωστό, ο **αριθμός Reynolds**.

Η εξαιρετικά χρήσιμη δυνατότητα του προγράμματος Tracker να αναλύει πειραματικά δεδομένα αλλά και να επιτρέπει παράλληλα και την δημιουργία προσομοιώσεων με βάση ένα θεωρητικό μοντέλο, μπορεί να διερευνήσει με τον καλύτερο τρόπο την ισχύ και τα όρια των παραδοχών που κάνουμε κατά την μελέτη πολλών φυσικών φαινομένων, αλλά και να προσδιορίσουμε παραμέτρους που είναι πολύ δύσκολο έως αδύνατο να υπολογίσουμε αναλυτικά.

B. Επίδραση της πίεσης του αέρα στη σταθερά απόσβεσης για την περίπτωση όπου, $F_{\alpha\nu\tau} = -bv$ (ταλάντωση σφαίρας).

Η πειραματική διάταξη και η πραγματοποίηση του πειράματος

Ο ταλαντωτής (σφαίρα) τοποθετήθηκε σε κατάλληλο στήριγμα στο εσωτερικό του κώδωνα κενού. Η πίεση του αέρα στο εσωτερικό του κώδωνα ρυθμίστηκε κάθε φορά στην επιθυμητή τιμή με τη βοήθεια αντλίας κενού. Το σύστημα τέθηκε σε ταλάντωση και η κίνηση καταγράφηκε σε βίντεο στα 60 fps. Μέσω του βίντεο μετρήθηκε κάθε φορά ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους ως εξής:

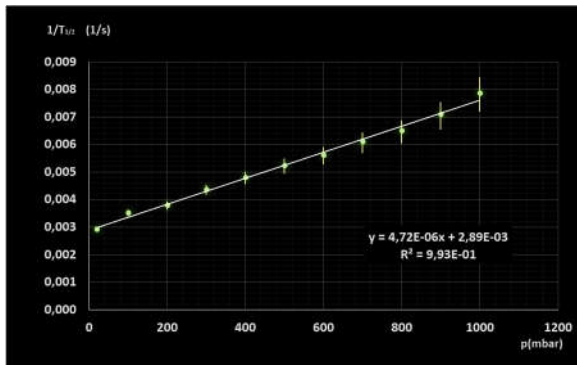
Με τη βοήθεια μιας γραμμής που σημειώθηκε με μαρκαδόρο στο πάνω μέρος της σφαίρας μπορούσαν να σημειωθούν, με τη βοήθεια του προγράμματος επεξεργασίας του βίντεο, οι αρχικές ακραίες θέσεις (στην πρώτη ημiperίοδο της ταλάντωσης) και να προσδιοριστεί η απόστασή τους (σε pixels) και επομένως το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης. Με βάση αυτή τη μέτρηση σημειώθηκε μια οριζόντια γραμμή στη θέση που αντιστοιχούσε στο μισό του αρχικού πλάτους. Έτσι, με την αναπαραγωγή του βίντεο, μπορούσε να χρονομετρηθεί το χρονικό διάστημα από την αρχή μέχρι τον υποδιπλασιασμό του πλάτους. Η διαδικασία φαίνεται στο συνοδευτικό βίντεο που μπορείτε να δείτε στο σύνδεσμο <https://youtu.be/tCrollWdnaE> ή σαρώνοντας το QR code της εικόνας. Οι μετρήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.



$p \pm 5 (mb)$	$T_{1/2} \pm 10 (s)$	$1/T_{1/2} (\times 10^{-3} s^{-1})$	$\delta(1/T_{1/2}) \times 10^{-3} s^{-1}$
20	342	2,92	0,09
100	284	3,52	0,12
200	264	3,79	0,14
300	229	4,37	0,19
400	208	4,81	0,23
500	191	5,24	0,27
600	178	5,62	0,32
700	164	6,10	0,37
800	154	6,49	0,42
900	141	7,09	0,50
1000	127	7,87	0,62

Σχεδιάζοντας το γράφημα του αντιστρόφου του χρόνου υποδιπλασιασμού σαν συνάρτηση της πίεσης παρατηρούμε ότι οι πειραματικές μετρήσεις μπορούν να προσεγγιστούν με μια γραμμική σχέση της σταθεράς απόσβεσης με την πίεση, τουλάχιστον για την συγκεκριμένη περιοχή πιέσεων.

Αυτό που έχει μεγαλύτερη σημασία είναι η διαπίστωση ότι υπάρχει σημαντικός παράγοντας απόσβεσης που δεν οφείλεται στην αντίσταση του αέρα, αφού ο σταθερός όρος της πειραματικής ευθείας (που αντιστοιχεί στην απόσβεση στο κενό) είναι περίπου το 40% της τιμής που αντιστοιχεί σε ατμοσφαιρική πίεση. **Η ύπαρξη της απόσβεσης αυτής οφείλεται προφανώς στην μη ιδανικότητα του ελατηρίου.** Συγκεκριμένα οι περιοδικές παραμορφώσεις του ελατηρίου έχουν σαν αποτέλεσμα την απώλεια ενέργειας και η δύναμη του ελατηρίου ικανοποιεί κατά προσέγγιση αλλά



όχι ακριβώς το νόμο του Hooke. Αξιοσημείωτο είναι ότι όπως φαίνεται από το αποτέλεσμα και η απόσβεση λόγω του ελατηρίου έχει γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα αφού παρά τη σημαντική συνεισφορά η σχέση που προκύπτει είναι γραμμική.

Λευκάδα Ιανουάριος 2024

Σπύρος Χόρτης